

**ÜBER DAS
QUALITATIVE VERHALTEN
POPULATIONSSABHÄNGIGER
MARKOFFSCHER
VERZWEIGUNGSPROZESSE**

**Dissertation
zur Erlangung des Grades
"Doktor der Naturwissenschaften"**

**am Fachbereich Mathematik
der Johannes-Gutenberg-Universität
in Mainz**

**Werner Rittgen
geb. in Worms**

Mainz 1986



Digitized by the Internet Archive
in 2026

ÜBER DAS
QUALITATIVE VERHALTEN
POPULATIONSSABHÄNGIGER
MARKOFFSCHER
VERZWEIGUNGSPROZESSE

Dissertation
zur Erlangung des Grades
"Doktor der Naturwissenschaften"

am Fachbereich Mathematik
der Johannes-Gutenberg-Universität
in Mainz

Werner Rittgen
geb. in Worms

Mainz 1986

. Berichterstatter: Prof. W.J. Bühler, Ph.D. (Mainz)

. Berichterstatter: Prof. Dr. H.-J. Schuh (Mainz)

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juni 1986

INHALTSVERZEICHNIS

Einführung	1
Notation	8
I. Der eindimensionale populationsabhängige Markoffsche Verzweigungsprozeß	
1. Definition des Prozesses	11
2. Regularität	17
3. Allgemeine Abschätzungen	24
4. Transienz	39
5. Rekurrenz	48
6. Ergodizität	54
7. Geometrische Ergodizität	60
8. Stationäre Maße	64
9. Vergleich der Kriterien	72
II. Der mehrdimensionale populationsabhängige Markoffsche Verzweigungsprozeß	
1. Definition des Prozesses	81
2. Regularität	89
3. Allgemeine Abschätzungen	94
4. Transienz	116
5. Rekurrenz	123
6. Ergodizität	127
7. Geometrische Ergodizität	136
8. Stationäre Maße	140
9. "Einfache" Kriterien	151
Anhang 0: Kriterien für Transienz, Rekurrenz und Ergodizität bei Markoffschen Ketten	169
Anhang 1: Lemmata für Teil I	175
Anhang 2: Lemmata für Teil II	180
Zusammenfassung	187
Literatur	188

EINFÜHRUNG

Die Entwicklung einer großen Zellpopulation aus einer oder wenigen Zellen durch Teilung von Zellen, die selbst einige Zeit zuvor durch Teilung entstanden sind, legt es nahe, diese Populationsdynamik auf Individuenebene mit Hilfe eines Verzweigungsprozesses zu beschreiben. Da bei solchen Populationen die Anzahl der Nachkommen, zumindest eine gewisse Zeit lang, konstant zwei bleibt, dafür aber die Lebensdauer variiert, sind Verzweigungsprozesse mit kontinuierlicher Zeit die "natürlichen" Modelle der Zellentwicklung. Die "klassischen" Arbeiten hierzu stammen von Yule (1924), Kendall (1948) und Bellman und Harris (1952).

Will man noch interne Zustände im Leben einer Zelle berücksichtigen, z.B. die Zellzyklusphasen (siehe z.B. Baserga 1976) oder sogar noch zu einer weiteren Unterteilung übergehen (siehe Darynkiewicz et al. 1980, 1981), so kommt man zwangsläufig zu einem höherdimensionalen Zustandsraum der Prozesse (siehe Rittgen und Tautu, 1976). Eine sehr ausführliche Übersicht über mathematische Modelle der Zellkinetik unter besonderer Berücksichtigung des Tumorstwachstum ist in Oldeweme (1983) zu finden.

Bei Mehr-Typ-Populationen ("Typ" im biologischen Sinne, für "Typ" im mathematischen Sinn wird "Dimension" verwendet) muß man zwischen solchen mit und solchen ohne Stammzellen unterscheiden. Zellpopulationen mit Stammzellen entsprechen singulären Verzweigungsprozessen oder Prozessen mit stationärer Einwanderung, zu deren Untersuchung Erneuerungsargumente gut verwendet werden können (siehe z.B. Rittgen 1983, Götz 1985). Diese Prozesse nehmen sowohl biologisch als auch mathematisch eine Sonderstellung ein, da sie die Existenz einer konstanten, unsterblichen Teilpopulation voraussetzen. Von den weiteren Überlegungen werden sie ausgeschlossen. Als weitere Einschränkung wird angenommen, daß die Durchlaufzeiten durch die verschiedenen internen Zustände (Phasen) gammaverteilt sind mit ganzzahligem Formparameter. Die betrachteten Modelle sind dann nicht-singuläre Markoffsche Verzweigungsprozesse.

Diese Prozesse zeigen aber (natürlich unabhängig von der speziellen Form der Lebensdauerverteilungen) das "typische" Verzweigungsprozeßverhalten, d.h. die Gesamtpopulation stirbt entweder aus oder wächst unbegrenzt an und entspricht somit keinem "natürlichen" Populationswachstum mit einem schnellen Anstieg bis eine gewisse Schwelle überschritten ist, um anschließend in ein annäherndstationäres Verhalten überzugehen. Dieses natürliche Popu-

ationswachstum läßt sich aber leicht auf einem Computer simulieren, wenn in den entsprechenden Verzweigungsmodellen bestimmte Parameter in geeigneter Weise von der aktuellen Größe der Gesamtpopulation abhängen, siehe z.B. Rittgen (1978, 1981). Programmtechnisch stellt solch eine Verallgemeinerung keine wesentliche Schwierigkeit dar, die mathematische Behandlung der dadurch entstehenden populationsabhängigen Verzweigungsprozesse scheint aber erst am Anfang zu stehen. Insbesondere scheint es noch kein einheitliches und mächtiges Hilfsmittel für eine eingehende Untersuchung zu geben, wie dies z.B. die Funktionaliteration der wahrscheinlichkeiterzeugenden Funktionen bei den "klassischen" Verzweigungsprozessen darstellt.

Für die Verallgemeinerung der "klassischen" Verzweigungsprozesse zu populationsabhängigen gibt es bisher drei verschiedene Ansätze:

- . φ -Verzweigungsprozesse entsprechen Galton-Watson-Prozessen, bei denen die Nachkommensverteilung unverändert bleibt, aber die Anzahl derjenigen Objekte, die zur Reproduktion zugelassen werden, durch eine Funktion φ bestimmt wird (Sevast'yanov und Zubkov 1974, Zubkov 1974, Yanev 1975). Diese Linie scheint nicht weiter verfolgt worden zu sein.
- . Populationsabhängige Galton-Watson-Prozesse, bei denen die Nachkommensverteilung nicht mehr konstant ist, sondern von der aktuellen Populationsgröße abhängt. Dieser Zweig scheint am besten entwickelt zu sein, siehe z.B. Labkovskii (1972), Fujimagari (1976), Levi (1979), Klebaner (1983, 1984a, 1984b), Höpfner (1983, 1985a, 1985b), Küster (1985).
- . Populationsabhängige Markoffsche Verzweigungsprozesse mit kontinuierlicher Zeit, bei denen die Nachkommensverteilung und eventuell noch die Sterberaten von der aktuellen Populationsgröße abhängen, siehe Lipow-Wofsy (1975, 1977, 1980), Rittgen (1980) und Küster (1983).

Die oben erwähnten Zellkinetik-Modelle gehören also zur letzten Klasse der populationsabhängigen Verzweigungsprozesse, wobei allerdings nur in einer Arbeit (Rittgen, 1980) mehrdimensionale Prozesse untersucht werden. Diese Arbeit und Levi (1979) sind bezüglich der verwendeten Untersuchungsmethoden am weitesten von der "klassischen" Theorie der Verzweigungsprozesse abgerückt. Die Untersuchungen in diesen beiden Arbeiten werden mit Kriterien für Transienz und Rekurrenz bzw. Ergodizität aus der Theorie der Markoffschen Ketten durchgeführt (siehe z.B. Mertens et al. 1978, Foster 1953). In der vorliegenden Arbeit wird dieser Weg weiter verfolgt und eine Reihe von Bedingungen an Momente der Nachkom-

mensverteilungen erarbeitet, die für weite Klassen von ein- oder mehrdimensionalen Prozessen Aussagen bezüglich Transienz, Rekurrenz, Ergodizität, geometrische Ergodizität und der Existenz von Momenten der stationären Maße ermöglichen. Neben den oben erwähnten Kriterien werden dazu die von Tweedie (1981, 1983) angegebenen verwendet (siehe Anhang 0). Diese Kriterien werden, um das Problem der Absorption im Zustand "0" zu umgehen, jeweils auf reflektierte Varianten der untersuchten Prozesse angewandt.

$\{Z(t): t \in \mathbb{R}_+\}$ sei ein populationsabhängiger Markoffscher Verzweigungsprozeß, der von jeder endlichen Populationsgröße mit positiver Wahrscheinlichkeit aussterben kann, z.B. durch sukzessiven Tod aller Individuen. $\{Z^*(t): t \in \mathbb{R}_+\}$ sei eine reflektierte Variante von $\{Z(t)\}$, indem z.B. eine zufällige Anzahl von Individuen einwandert, sobald $\{Z(t)\}$ den Zustand 0 erreicht, oder die Nachkomensverteilungen so modifiziert werden, daß bei einer Gesamtpopulation von nur einem Objekt dieses mindestens einen Nachkommen hat. $\{Z^*(t)\}$ ist aber nichts anderes als eine Folge unabhängiger Kopien von $\{Z(t)\}$, wobei eine neue Kopie jeweils dann gestartet wird, wenn die vorhergehende ausgestorben ist, siehe z.B. Höpfner (1983), Satz 2.1.

Für diese beiden Prozesse gilt dann (gegeben $Z(0) = Z^*(0) \neq 0$).

$$P\left[Z(t) \text{ endlich, } t > 0\right] = 1 \iff \{Z^*(t)\} \text{ regulär}$$

$$P\left[\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 0\right] < 1 \iff \{Z^*(t)\} \text{ transient}$$

$$P\left[\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 0\right] = 1 \iff \{Z^*(t)\} \text{ rekurrent}$$

$$E\left[\inf\{t: Z(t)=0\}\right] < \infty \iff \{Z^*(t)\} \text{ ergodisch}$$

Für die Gesamtpopulation von $\{Z^*(t)\}$ bedeutet diese Klassifikation:

transient : Die Gesamtpopulation wächst über alle Grenzen.

0-rekurrent: Die Gesamtpopulation kann nach längerer Zeit fast jeden beliebigen Wert annehmen und zwischenzeitlich stark fluktuieren.

ergodisch : Die Population verhält sich nach einer gewissen Anlaufzeit angenähert stationär und kann Störungen kompensieren (besonders schnell im geometrisch ergodischen Fall).

ne direkte Übertragung dieser Begriffe in die Biologie ist nur mit Einschränkungen möglich, die folgende Gegenüberstellung kann aber dennoch eine gewisse Analogie zur medizinisch-biologischen Notation widerspiegeln:

maligne — transient

hyperplastisch — 0-rekurrent

normal — ergodisch

Eine Schwierigkeiten entstehen, wenn ein transienter Zellpopulationsprozeß als maligne bezeichnet wird, aber nicht jede als maligne klassifizierte Population muß transient sein, da auch ein 0-rekurrenter Prozeß in endlicher Zeit jede biologisch vorgegebene Schranke überschreiten kann. Auf der anderen Seite kann aber ein solcher Prozeß sich auch lange Zeit medizinisch unauffällig verhalten und sogar wieder aussterben (in der nicht-reflektierten Variante). Ein ergodischer Prozeß mit großer Gesamtpopulation (großer Erwartungswert der stationären Verteilung) kann ein normales, sich ständig erneuerndes Gewebe repräsentieren, während ein ergodischer Prozeß mit kleiner Gesamtpopulation (kleinem Erwartungswert der stationären Verteilung) als "ungefährliche" Subpopulation von transformierten Zellen in einem normalen Gewebe angesehen werden kann. Diese Teilpopulation kann nur durch eine fortlaufende Transformation von normalen Zellen (Einwanderung) am Aussterben gehindert werden.

Da absorbierende Zustände bei Markoffschen Ketten eine gewisse Sonderstellung einnehmen, werden im folgenden nur reflektierte Varianten der Prozesse betrachtet und später auch Bedingungen angegeben, unter denen keine absorbierenden Zustände mit positiver Gesamtpopulation auftreten können. Desweiteren wird die spezielle Form der Nachkommensverteilungen für die Zellkinetik-Modelle nicht explizit benutzt, sodaß die erzielten Resultate auch auf andere Populationsmodelle anwendbar sind.

Neben dieser Einführung besteht die vorliegende Arbeit aus zwei Hauptteilen, drei Anhängen und dem Literaturverzeichnis. Im ersten Hauptteil werden die eindimensionalen Prozesse und im zweiten Hauptteil die mehrdimensionalen Prozesse untersucht. Anhang 0 enthält eine Zusammenstellung der verwendeten Testkriterien für Transienz, Rekurrenz, Ergodizität und die Existenz von Momenten der stationären Maße. In den Anhängen 1 und 2 sind die in den Hauptteilen I und II verwendeten Lemmata zusammengefaßt.

Die folgenden (hinreichenden) Bedingungen für Regularität, Transienz, Rekurrenz und Ergodizität stellen jeweils die einfachste Form der erzielten Resultate dar und sollen als Beispiele der entwickelten Kriterien dienen.

I. Eindimensionaler Prozeß

$\lambda(k)$ sei die Sterberate und m_k die erwartete Anzahl von Nachkommen eines Objektes bei einer Gesamtpopulation von $k \in \mathbb{N}$ Objekten $[0 < \lambda(k) < \infty, m_k < \infty]$.

Für Regularität:

$$\sup_k \lambda(k) < \infty$$

$$\sup_k m_k < \infty$$

Für Transienz:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} m_k > 1$$

Gleichmäßige Beschränktheit eines höheren Momentes der Nachkommensverteilungen (z.B. $1+\delta$ -Moment, $\delta > 0$).

Die Bedingung an m_k ist alleine nicht hinreichend, wie anhand eines Beispiels gezeigt wird.

Für Rekurrenz:

$$m_k \leq 1 \quad \text{für alle } k \text{ hinreichend groß.}$$

Für Ergodizität:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) [m_k - 1] < 0$$

II. Mehrdimensionaler Prozeß (d = Dimension)

$\lambda_i(x)$ sei die Sterberate und $m_{ij}(x)$ der Vektor der erwarteten Anzahl von Nachkommen eines Objektes vom Typ i ($1 \leq i \leq d$) bei einer Gesamtpopulation von $x \in \mathbb{N}_0^d - \{0\}$ Objekten $[0 < \lambda_i(x) < \infty, m_{ij}(x) < \infty]$.

$$\lambda(x) = [\lambda_1(x), \dots, \lambda_d(x)] \quad , \quad \Lambda(x) = \text{diag}[\lambda(x)] \quad ,$$

$$M(x) = [m_{ij}(x)]_{1 \leq i, j \leq d} \quad ,$$

$\rho(B)$ = Eigenwert mit dem größten Realteil von $B = [b_{ij}]$,
 $b_{ij} \geq 0$ für $i \neq j$.

Für Regularität:

$$\sup_x \|\lambda(x)\| < \infty$$

$$\sup_x \|M(x)\| < \infty$$

Für Transienz:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \inf \Lambda(x) [M(x) - I] = B_* \quad (\text{elementweise})$$

wobei B_* irreduzibel und $\rho(B_*) > 0$.

Gleichmäßige Beschränktheit eines höheren Momentes der Nachkommensverteilungen (z.B. $1+\delta$ -Moment der Norm, $\delta > 0$).

Für Rekurrenz:

$$\Lambda(x) [M(x) - I] \leq B_* \quad (\text{elementweise})$$

für alle x mit $\|x\|$ hinreichend groß,

wobei B_* irreduzibel und $\rho(B_*) = 0$.

Für Ergodizität:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \sup \Lambda(x) [M(x) - I] = B_* \quad (\text{elementweise})$$

wobei B_* irreduzibel und $\rho(B_*) < 0$.

Bedingungen an $\rho[\Lambda(x) [M(x) - I]]$ alleine sind nicht hinreichend zur Klassifikation der mehrdimensionalen Prozesse, wie anhand von zwei Beispielen gezeigt wird.

Herrn Prof. Wolfgang J. Bühler danke ich für die Betreuung der Arbeit und wertvolle Hinweise und Anregungen.

Herrn Prof. Petre Tautu danke ich für wertvolle Hinweise und Kommentare und für seine fördernde Anteilnahme bei der Vorbereitung und Ausarbeitung dieser Arbeit.

Mein Dank gilt nicht zuletzt meinen Kollegen, in besonderem Maße Herrn Gerd Rosenkranz, aus dem Arbeitsgebiet 1 des Teilprojektes C1 des SFB 123 "Stochastische Mathematische Modelle" für viele und hilfreiche Diskussionen.

Notation

$\mathbb{N}$ sei die Menge der natürlichen Zahlen,

$\mathbb{Z}$ sei die Menge der ganzen Zahlen,

$\mathbb{R}$ sei die Menge der reellen Zahlen,

$\mathbb{C}$ sei die Menge der komplexen Zahlen.

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$

speziell für Teil II:

$d > 1$ sei die Dimension der betrachteten Räume bzw. Mengen.

(z.B. $\mathbb{C}^d$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}_+^d$, $\mathbb{N}_0^d$)

für $A, B \subset \mathbb{C}^d$ sei:

$A + B := \{x+y : x \in A, y \in B\},$

$A - B := \{x \in A : y \notin B\},$

$\text{Rd}(A) := \text{Rand von } A.$

e^i , $1 \leq i \leq d$, sei der i -te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{C}^d$.

I sei die $d \times d$ - Einheitsmatrix.

$s^x := \prod_{i=1}^d s_i^{x_i}$ für $s \in \mathbb{C}^d$, $x \in \mathbb{N}_0^d$

$\mathbb{S} := \mathbb{N}_0^d$ (Zustandsraum des Prozesses)

$\mathbb{S}_* := \{x \in [\mathbb{N}_0 \cup \{-1\}]^d : x_i = -1 \text{ für höchstens ein } i\}$

$\mathbb{S}_n := \{x \in \mathbb{S} : \|x\|_1 \geq n\}$ für $n \in \mathbb{N}$

$\|x\|_r := \left[\sum_{i=1}^d |x_i|^r \right]^{1/r}$ für $x \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq r \leq \infty$

$\|B\|_r := \sup_{x \in {}_r K} \|Bx\|_s$ für $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $1 \leq r, s \leq \infty$

$${}_rK := \{x \in \mathbb{R}^d: \|x\|_r = 1\}$$

$${}_rK_+ := \{x \in {}_rK: x_i \geq 0, 1 \leq i \leq d\}$$

Bei Verwendung der euklidischen Norm in den vier vorangegangenen Definitionen wird der Index 2 weggelassen.

$$K_\delta := \{x \in K: \|x-y\| \leq \delta \text{ für ein } y \in K_+\}, \delta > 0$$

$$G_+ := \{x \in \mathbb{R}^d: x = ty \text{ für ein } t \in \mathbb{R}_+ \text{ und ein } y \in K_+\} = \mathbb{R}_+^d$$

$$G_\delta := \{x \in \mathbb{R}^d: x = ty \text{ für ein } t \in \mathbb{R}_+ \text{ und ein } y \in K_\delta\}, \delta > 0$$

$$\nabla := \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right]$$

$$\Delta := \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq d}$$

Für $x, y \in \mathbb{R}^d$ sei:

$$x \star y := [b_{ij}]_{1 \leq i, j \leq d} \quad \text{mit } b_{ij} := x_i y_j,$$

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq d,$$

$$x < y \iff x_i < y_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq d \text{ und } x \neq y,$$

$$x \ll y \iff x_i < y_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq d.$$

" $\geq$ ", ">" und ">>" seien analog definiert.

Beim Vergleich eines Vektors mit einem Skalar ist dieser als Vektor mit gleichen Komponenten und entsprechender Dimension zu interpretieren.

Für Matrizen gelte die obige Konvention bezüglich

" $\leq$ ", "<", "<<", ">>", ">" und " $\geq$ "

entsprechend.

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} x \in \mathbb{S}_n$$

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \iff \liminf_{n \rightarrow \infty} x \in \mathbb{S}_n$$

Es seien $B, B^{(n)} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $B = [b_{ij}]$, $B^{(n)} = [b_{ij}^{(n)}]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup B^{(n)} = B \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup b_{ij}^{(n)} = b_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq d,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf B^{(n)} = B \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \inf b_{ij}^{(n)} = b_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq d.$$

Analog dazu seien auch

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \sup \quad \text{und} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \inf$$

für Matrizen jeweils komponentenweise definiert.

Für eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit $B + \delta I > 0$ für ein $\delta \geq 0$ sei

$\rho(B)$ der Eigenwert mit dem größten Realteil.

Verweise

Kapitel i.k (Abschnitt i.k.n) verweist auf (Abschnitt n in) Kapitel k von Teil i = I, II dieser Arbeit. Bei Verweisen innerhalb des gleichen Teils wird "i" weggelassen.

Satz (Korollar u.s.w.) i.k.n bzw. a.n verweist auf Satz n von Kapitel k in Teil i bzw. in Anhang a = A0, A1, A2. Innerhalb des gleichen Teils bzw. Anhangs wird "i" bzw. "a" nicht angegeben.

Ganz analog erfolgen die Verweise auf Formeln mit (i.k.n) bzw. (a.n). Innerhalb des gleichen Kapitels wird auch noch die Kapitelnummer "k" weggelassen.

TEIL IDer eindimensionale populationsabhängigeMarkoffsche Verzweigungsprozeß1. Definition des Prozesses

$\{Z(t): t \in \mathbb{R}_+\}$ sei ein eindimensionaler populationsabhängiger Verzweigungsprozeß mit Zeitparametern $\{\lambda(k): k \in \mathbb{N}\}$ und Nachkommensverteilungen gegeben durch die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen $\{f(s, k): k \in \mathbb{N}\}$. Diese haben die Form

$$f(s, k) := \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) s^i, \quad s \in \mathbb{C}, \quad |s| \leq 1,$$

wobei $p_i(k)$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein Objekt bei seinem Tod durch i Nachkommen ersetzt wird, wenn unmittelbar vor diesem Ereignis die Größe der Gesamtpopulation $k \geq 1$ war. $\lambda(k)$ ist die aktuelle Sterberate eines Objektes bei einer Gesamtpopulation von k Objekten.

Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten dieses Prozesses werde mit $P(t) = \{P_{ij}(t)\}_{i, j \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnet.

$$P_{00}(t) := 1 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_+$$

$$P_{0j}(t) := 0 \quad \text{für } j \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$P_{ij}(t) := \mathbf{P}\{Z(t+s)=j \mid Z(s)=i\} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad s, t \in \mathbb{R}_+$$

$$P_{ij}(h) = h i \lambda(i) p_{j-i+1}(i) + o(h) \\ \text{für } i \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad j \geq i-1, \quad j \neq i$$

$$P_{ii}(h) = 1 - h i \lambda(i) [1 - p_1(i)] + o(h) \\ \text{für } i \in \mathbb{N}$$

$$P_{ij}(h) = o(h) \quad \text{für } i \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad j < i-1$$

Der infinitesimale Generator der Kontraktionshalbgruppe $\{P(t): t \in \mathbb{R}_+\}$ werde mit $Q = \{q_{ij}\}_{i, j \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnet. Dessen Komponenten haben folgende Form:

$$q_{0j} = 0 \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_0$$

$$q_{ij} = i \lambda(i) p_{j-i+1}(i) \quad \text{für } i \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad j \geq i-1, \quad j \neq i$$

$$q_{ii} = -i\lambda(i)[1-p_1(i)] \quad \text{für } i \in \mathbb{N}$$

$$q_{ij} = 0 \quad \text{für } i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}_0, j < i-1$$

$$q_i := -q_{ii} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0$$

$\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ sei der "Sprungprozeß" zu $\{Z(t)\}$ und $\{T_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ sei der Prozeß der "Sprungzeiten" von $\{Z(t)\}$, wobei auch die sogenannten Pseudosprünge berücksichtigt werden, bei denen ein Objekt stirbt und durch genau einen Nachkommen ersetzt wird.

$$T_0 := 0$$

T_n := Zeitpunkt der n-ten Geburt in der Population
(:= ∞ , falls dieses Ereignis nie auftritt).

Die drei Prozesse sind folgendermaßen gekoppelt:

$$Z(t) = X_n \quad \text{für } T_n \leq t < T_{n+1}, n \in \mathbb{N}_0$$

Für $\{X_n\}$ und $\{T_n\}$ gilt folgende Rekursion, solange $X_n > 0$:

$$X_{n+1} = X_n - 1 + \xi_{X_n}^{(n)}$$

$$T_{n+1} = T_n + \tau_{X_n}^{(n)}$$

$\xi_k - 1$ ist die Änderung des Sprungprozesses vom Zustand $k \geq 1$ in den Zustand $k - 1 + \xi_k$, die durch den Tod eines der k vorhandenen Objekte (-1) und gleichzeitige Geburt seiner Nachkommen (ξ_k) erfolgt. τ_k ist die Wartezeit bis zum Tod eines der k vorhandenen Objekte. Dabei sind $\{\xi_k^{(n)}; n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}\}$ und $\{\tau_k^{(n)}; n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}\}$ unabhängige Zufallsvariable, jeweils identisch verteilt für festes $k \in \mathbb{N}$, mit

$$P\{\xi_k^{(n)} = i\} = p_i(k) \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und}$$

$$P\{\tau_k^{(n)} > t\} = \exp[-k\lambda(k)t] \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_+.$$

1.1. Bezeichnungen

$$m_k := E\xi_k = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) i$$

$$C_k^\varphi := E\varphi(\xi_k) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) \varphi(i)$$

für eine Funktion $\varphi : N_0 \rightarrow R_+$.

$$C_k^{(\delta)} := E\xi_k^\delta = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) i^\delta, \quad \delta \geq 0$$

Insbesondere ist $C_k^{(0)} = 1$ und $C_k^{(1)} = m_k$.

$$\sigma_k^2 := \text{Var}(\xi_k) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) (i - m_k)^2$$

falls $m_k < \infty$.

1.2. Generelle Voraussetzungen

Die Prozesse $\{Z(t)\}$, $\{T_n\}$ und $\{X_n\}$ sind nur dann sinnvoll definiert, wenn zumindest

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) = 1 \quad \text{für } k \in N \quad (1)$$

$$0 < \lambda(k) < \infty \quad \text{für } k \in N \quad (2)$$

gelten. $\{X_n\}$ ist eine Markoffsche Kette mit diskreter Zeit und Zustandsraum N_0 . $\{Z(t)\}$ ist eine Markoffsche Kette mit kontinuierlicher Zeit, die bis zum ersten Häufungspunkt der Sprungzeiten $\{T_n\}$ die gleichen Zustände wie $\{X_n\}$ annimmt, siehe hierzu das nächste Kapitel.

Eine Veränderung in $\{X_n\}$, der Populationsgröße erfolgt durch den Tod eines Objektes und gleichzeitige Geburt seiner Nachkommen, insbesondere kann die Populationsgröße dabei höchstens um eine Einheit kleiner werden. Die Bedingung

$$p_0(1) = 0 \quad (3)$$

führt somit auf einfache Weise zu einer reflektierten Variante der betrachteten Prozesse.

ie beiden zusätzlichen Bedingungen

$$p_0(k) > 0 \quad \text{für } k > 1 \quad (4)$$

nd

"zu jedem $n \geq 1$ existiert ein $k(n) \leq n$, sodaß

$$\sum_{i=0}^{n-k(n)+1} p_i(k(n)) < 1" \quad (5)$$

arantieren, daß der Zustandsraum von $\{X_n\}$ ganz $\mathbb{N}$ und $\{X_n\}$ sowohl irreduzibel als auch aperiodisch ist. Die wesentlich einfachere, aber restriktivere Bedingung

$$p_0(k) + p_1(k) < 1 \quad \text{für } k \geq 1 \quad (6)$$

chließt (5) ein.

st eine der beiden Bedingungen (4) und (5) verletzt, so ist $\{X_n\}$ nicht mehr irreduzibel und der Zustandsraum kann in mehrere Klassen zerlegt werden.

2.1. Beispiele

) Für ein $n > 1$ gilt

$$p_0(k) = 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq n,$$

$$p_0(k) > 0 \quad \text{für } k > n.$$

Die Zustände $\{1, \dots, n-1\}$ sind unwesentlich, sofern $p_1(k) < 1$ für $1 \leq k \leq n$.

) Für ein $n > 1$ gilt

$$p_1(n) = 1.$$

Der Zustand n ist absorbierend.

ür die weiteren Überlegungen sei dieser Fall ausgeschlossen.

) Für ein $n > 1$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n-k+1} p_i(k) = 1 \quad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

Die Zustände $\{1, \dots, n\}$ bilden eine möglicherweise weiter unteilbare Rekurrenzklasse.

d) Gilt zu der Bedingung von c) zusätzlich noch

$$p_0(n+1) = 0,$$

so zerfällt der Zustandsraum in die beiden Teile $\{1, \dots, n\}$ und $N - \{1, \dots, n\}$, die dann getrennt weiter untersucht werden können.

e) Es existiert eine streng monoton wachsende Folge $\{n_i\} \subset N$, sodaß

$$p_0(n_i) = 0 \quad \text{für } i \in N.$$

In diesem Fall muß der Bereich zwischen zwei Gliedern der Folge $\{n_i\}$ jeweils getrennt untersucht werden. Dabei können abzählbar viele endliche Rekurrenzklassen, endlich viele endliche Rekurrenzklassen oder keine Rekurrenzklasse auftreten. Der letzte Fall tritt genau dann ein, wenn jedes n_i von allen kleineren Populationsgrößen mit positiver Wahrscheinlichkeit übersprungen werden kann. Dann sind aber alle Zustände unwesentlich.

Um die etwas pathologischen Fälle b) bis e) auszuschließen, sollen für alle weiteren Untersuchungen die Voraussetzungen (3), (4) und (5) bzw. (6) gelten, entweder wie oben angegeben oder in der folgenden, etwas allgemeineren Form für ein $N \geq 1$:

$$p_0(k) = 0 \quad \text{für } k \leq N \quad (3')$$

$$p_1(k) < 1 \quad \text{für } k < N \quad (3'')$$

$$p_0(k) > 0 \quad \text{für } k > N \quad (4')$$

"zu jedem $n \in N$ existiert ein $k(n) \leq n$, sodaß

$$\sum_{i=0}^{n-k(n)+1} p_i(k(n)) < 1 \quad (5')$$

$$p_0(k) + p_1(k) < 1 \quad \text{für } k \geq N \quad (6')$$

N ist aufgrund der Bedingungen (3') und (4') eindeutig bestimmt.

1.3. Die Voraussetzung (φ^*)

Für die späteren Abschätzungen wird eine Funktion φ benötigt, die sowohl explizit als auch implizit in den verallgemeinerten Momenten C_K^φ auftritt. Voraussetzung (φ^*) bedeutet dann:

" φ sei eine Funktion, die die folgenden drei Bedingungen erfüllt."

1. $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\varphi(1) = 1$.
2. $t/\varphi(t)$ fällt für $t \rightarrow \infty$ monoton gegen 0.
3. Für jedes $\delta > 0$ und $t > 1$ ist genau eine der drei folgenden Aussagen richtig:
 - a) $t^{1+\delta}/\varphi(t)$ steigt für $t \rightarrow \infty$ monoton gegen ∞ .
 - b) $\varphi(t) = t^{1+\delta}$.
 - c) $t^{1+\delta}/\varphi(t)$ fällt für $t \rightarrow \infty$ monoton gegen 0.

Eine "typische" Funktion φ verhält sich asymptotisch wie $t^{1+\alpha} \log^\beta t$ mit $\alpha, \beta \geq 0$ und $\alpha + \beta > 0$. Unter Berücksichtigung der Bedingungen 1 und 2 könnte eine exakte Definition dann folgendermaßen lauten:

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ t^{1+\alpha} & \text{für } 1 \leq t \leq \exp(1) \\ t^{1+\alpha} \log^\beta t & \text{für } t \geq \exp(1) \end{cases}$$

2. Regularität

Eine Markoffsche Kette mit kontinuierlicher Zeit ist bis auf den Startwert bzw. die Startverteilung nur dann durch die Q-Matrix eindeutig bestimmt, wenn sich die Sprungzeiten im Endlichen fast sicher nicht häufen. Für die Populationsgröße bedeutet dies, daß sie in jedem endlichen Zeitintervall fast sicher endlich ist, der Prozeß explodiert also fast sicher nicht.

Definition 2.1.

$$\mathcal{E}_n := \mathcal{E}(X_0, \dots, X_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

sei die von $\{X_0, \dots, X_n\}$ erzeugte σ -Algebra.

Satz 2.2.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Regularität von $\{Z(t)\}$ ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{X_n \lambda(X_n)} = \infty \quad \text{f.s.}$$

Beweis: (siehe Chung 1967, Seite 259-260)

$$\mathbb{P}\left[Z(t) < \infty \text{ für } t > 0\right] = 1$$

ist äquivalent zu

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty\right] = 1.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise sei $\tau_n := \tau_{X_n}^{(n)}$.

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{E}[\tau_n | \mathcal{E}_n] = \frac{1}{X_n \lambda(X_n)}$$

$$\tau'_n := \min(1, \tau_n)$$

$$\kappa_n := \sum_{i=0}^{n-1} \left[\tau'_i - \mathbb{E}[\tau'_i | \mathcal{E}_i] \right]$$

Die Folge der Zufallsvariablen $\{x_n\}$ bildet ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{E}_n\}$. Die Summanden auf der rechten Seite sind gleichmäßig beschränkt, und damit gilt nach Doob (1953), Seite 323, daß die beiden Summen

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tau'_i \quad \text{und}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\tau'_i \mid \mathcal{E}_i \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1 - \exp(-x_n \lambda(x_n))}{x_n \lambda(x_n)}$$

fast sicher gemeinsam konvergieren oder divergieren.

Da für jede positive Folge $\{a_i\}$ die beiden Summen

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a_i} \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1 - \exp(-a_i)}{a_i}$$

gemeinsam konvergieren oder divergieren, ist

$$\mathbb{P} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n \lambda(x_n)} = \infty \right] = 1$$

äquivalent zu

$$\mathbb{P} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \tau'_i = \infty \right] = 1$$

und dies wiederum ist äquivalent zu

$$\mathbb{P} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty \right] = 1 \quad . \quad \square$$

Korollar 2.3.

Der Prozeß $\{Z(t)\}$ ist regulär, wenn

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < \infty \quad \text{f.s.}$$

Dieses Korollar ist eine triviale Folgerung aus Satz 2.2, erfaßt aber alle rekurrenten Prozesse, sodaß Korollar 2.4 bis Satz 2.7 auf transiente Prozesse beschränkt werden können.

Korollar 2.4.

Der Prozeß $\{Z(t)\}$ ist regulär, wenn $\{X_n\}$ transient ist und eine positive Funktion $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ existiert, sodaß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h(n)} = \infty \quad \text{und}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \lambda(X_n)}{h(n)} < \infty \quad \text{f.s.}$$

Beweis:

Jeweils pfadweise gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \lambda(X_n)}{h(n)} < \infty \quad \text{ist äquivalent zu}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{h(n)}{X_n \lambda(X_n)} = 2\varepsilon > 0,$$

d.h. es existiert ein $N > 0$, sodaß

$$\frac{h(n)}{X_n \lambda(X_n)} \geq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{X_n \lambda(X_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h(n)} \frac{h(n)}{X_n \lambda(X_n)} \geq \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{h(n)} = \infty$$

Da die letzte Bedingung des Korollars fast sicher gilt, gilt auch die letzte Abschätzung fast sicher. $\square$

Korollar 2.5.

Der Prozeß $\{Z(t)\}$ ist regulär, wenn $\{X_n\}$ transient ist,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda(n) < \infty$$

und eine positive Funktion $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ existiert, sodaß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h(n)} = \infty \quad \text{und}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{h(n)} < \infty \quad \text{f.s.}$$

Beweis:

Analog zum Beweis von Korollar 2.4 läßt sich zeigen, daß aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h(n)} = \infty \quad \text{auch}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{X_n} = \infty \quad \text{f.s.} \quad \text{folgt.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{X_n \lambda(X_n)} \geq \frac{1}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda(n)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{X_n} = \infty \quad \text{f.s.} \quad \square$$

Anmerkung 2.6.

Die Bedingung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{h(n)} < \infty \quad \text{f.s.}$$

stellt eine Abschätzung des Wachstumsverhaltens von $\{X_n\}$ dar. Eine genauere Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $\{X_n\}$, $\{T_n\}$ und $\{Z(t)\}$ im transienten Fall ist in Küster (1983) zu finden. Analog zu den dort verwendeten Martingalmethoden läßt sich $\{X_n\}$ mit Hilfe eines asymptotischen Martingals nach oben abschätzen und so eine einfache Regularitätsbedingung finden.

Satz 2.7.

$\{X_n\}$ sei transient und es gelte

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) < \infty$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} m_k < \infty.$$

Dann ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ regulär.

Beweis:

Es gilt $\sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda(k) < \infty$. Damit ist Korollar 2.5 anwendbar.

Wegen $\limsup_{k \rightarrow \infty} m_k < \infty$, aber nicht notwendig $m_k < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß

$$M := \sup_{k \geq N} m_k - 1 < \infty.$$

Da $\{X_n\}$ nach Voraussetzung transient ist, existiert ein $L > 0$, $L < \infty$ f.s., sodaß $X_n \geq N$ für alle $n \geq L$, deshalb genügt es für die weiteren Untersuchungen, sich auf solche Prozesse zu beschränken, für die $X_n \geq N$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Für $\{X_n\}$ gilt die Rekursion

$$X_{n+1} = X_n - 1 + \xi_{X_n}.$$

Für den weiteren Beweis sei:

$$\xi_{n+1} := X_{n+1} + 1 - X_n - m_{X_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

$$= \xi_{X_n} - m_{X_n}$$

$$\Sigma_{n+1} := \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

$$\eta_{n+1} := M + 1 - m_{X_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

Für diese Zufallsvariablen gilt:

$$\xi_{n+1} \geq -(M+1)$$

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{E}_n] = 0$$

$$\mathbb{E}[|\xi_{n+1}| | \mathcal{E}_n] = \mathbb{E}[|\xi_{X_n} - m_{X_n}| | X_n] \leq 2 \sup_{k \geq N} m_k = 2(M+1)$$

$\{\Sigma_n\}$ ist ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{E}_n\}$.

$$0 \leq \eta_n \leq M+1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und damit

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i \leq M+1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $\{X_n\}$ gilt jetzt

$$X_{n+1} = X_n + M + \xi_{n+1} - \eta_{n+1}.$$

Diese Rekursion wird mit der deterministischen Abschätzung

$$g(n+1) = g(n) + M, \quad g(0) = X_0$$

verglichen. Diese Differenzengleichung hat die Lösung

$$g(n) = X_0 + M n, \quad n \geq 0.$$

$$\begin{aligned} X_{n+1} - g(n+1) &= X_n + \xi_{n+1} - \eta_{n+1} - g(n) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i - \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i \end{aligned}$$

Damit gilt dann

$$X_n = g(n) \left[1 + \frac{n}{g(n)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{n}{g(n)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i \right]$$

Wähle $h(n) = g(n) \log n$!

$$\frac{X_n}{h(n)} = \frac{1}{\log n} + \frac{n}{g(n)} \frac{1}{n \log n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{n}{g(n)} \frac{1}{n \log n} \sum_{i=1}^n \eta_i$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{h(n)} = \frac{1}{M} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n \log n}$$

Der Satz ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß dieser Limes superior fast sicher endlich ist.

Es sei $\{\kappa_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von endlichen Stopzeiten, sodaß $\kappa_n \geq n$ und $\{\kappa_n = i\} \in \mathcal{E}_i$. Für diese Folge gilt:

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[\frac{1}{\kappa_n \log \kappa_n} \Sigma_{\kappa_n} \right] \right| &= \left| \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\frac{1}{\kappa_n \log \kappa_n} \Sigma_{\kappa_n} \middle| \kappa_n \right] \right] \right| \leq \\ &\mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\frac{2(M+1)}{\log \kappa_n} \middle| \kappa_n \right] \right] \leq \frac{2(M+1)}{\log n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Damit ist $\left\{ \frac{1}{n \log n} \Sigma_n \right\}$ ein L^1 -beschränktes asymptotisches Martingal (siehe die folgende Definition 2.8), und es existiert nach Lemma 2.9 eine Zufallsvariable Σ^* , sodaß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \log n} \Sigma_n = \Sigma^* \quad \text{f.s.}$$

Aus

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{n \log n} \Sigma_n \right| \leq \frac{2(M+1)}{\log n} \rightarrow 0 \quad \text{folgt}$$

$$\mathbb{E} |\Sigma^*| = 0 \quad \text{und somit}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{h(n)} = 0 \quad \text{f.s.}$$

Gilt zusätzlich noch

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^{(1+\delta)} < \infty \quad \text{für ein } \delta > 0,$$

so konvergiert $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ fast sicher gegen 0, siehe Theorem 2.18 in Hall and Heyde (1980), und man erhält sogar

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{g(n)} \leq 1 \quad \text{f.s. } \square$$

Definition 2.8. (siehe Billingsley, 1979, Seite 428)

$\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge von Zufallsvariablen und

$\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge von σ -Algebren mit $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.

Y_n sei meßbar bezüglich $\mathcal{F}_n$ und $E|Y_n| < \infty$ für $n \geq 1$.

$\mathcal{K}$ sei die Klasse der endlichen Stopzeiten:

$\kappa \in \mathcal{K}$ falls κ nur endlich viele Werte aus $\mathbb{N}$ annimmt und falls $\{\kappa = n\} \in \mathcal{F}_n$ für $n \geq 1$.

Die Folge $\{Y_n\}$ heißt ein asymptotisches Martingal (amart), falls für jede Folge $\{\kappa_n\} \subset \mathcal{K}$ von endlichen Stopzeiten mit $\kappa_n \geq n$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[Y_{\kappa_n} \right] \quad \text{existiert und ist endlich.}$$

Lemma 2.9.

$\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei ein L^1 -beschränktes asymptotisches Martingal. Dann existiert eine Zufallsvariable Y^* , sodaß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y^* \quad \text{f.s.}$$

Siehe z.B. Theorem 2.3 in Edgar and Sucheston (1976).

3. Allgemeine Abschätzungen

Die Untersuchung des eindimensionalen populationsabhängigen Markoffschen Verzweigungsprozesses bezüglich Transienz, Rekurrenz und Ergodizität wird mit Hilfe der in Anhang 0 zusammengestellten Kriterien durchgeführt. Die Kriterien haben folgende Gestalt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} q_{kj} \phi(j) = k\lambda(k) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi(k+i-1) - \phi(k)]$$

$$\varepsilon = \delta\phi(k) - \varepsilon$$

Diese Ungleichung mit

$\varepsilon = 0$, $\delta = 0$ für Rekurrenz bzw. Transienz

$\varepsilon > 0$, $\delta = 0$ für Ergodizität und

$\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ für geometrische Ergodizität

muß eine geeignete Testfunktion $\phi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ für alle bis auf endlich viele $k \in \mathbb{N}$ erfüllen, siehe Bedingung (A0.2b) und Satz A0.4 bis Satz A0.7. Um die Beweise in den nächsten Kapiteln übersichtlicher zu gestalten und um Wiederholungen einzelner Beweisschritte weitgehend zu vermeiden, werden die Abschätzungen von

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi(k+i-1) - \phi(k)] \quad (*)$$

zunächst ohne direkte Bezugnahme auf die verschiedenen Kriterien durchgeführt. Ein weiterer Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin, daß mit diesen Abschätzungen auch noch Aussagen über den zugehörigen Sprungprozeß und die Momente der stationären Maße gewonnen werden können. Bei der Wahl der Testfunktion zum Nachweis der Transienz spielt die Bedingung (A0.3) die wesentliche Rolle, das gleiche gilt für Bedingung (A0.4) zum Nachweis der Rekurrenz. Anders sind die Verhältnisse allerdings im Falle der Ergodizität. Um die Kriterien für $\varepsilon > 0$ und besonders für $\delta > 0$ oder die Existenz von höheren Momenten der stationären Maße zu erfüllen, müssen verschiedene, stärker steigende Funktionen ϕ gewählt werden, sodaß auch die Bedingungen (A0.1a) bzw. (A0.1b) wesentlich werden.

Folgende Testfunktionen werden untersucht (für ϕ_1 und ϕ_2 siehe z.B. Levi 1979):

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\log(2+t)}$$

$$\phi_2(t) = \log(1+t)$$

$$\phi_3(t) = t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\phi_4(t) = t^{1+\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\phi_5(t) = t^{2+\alpha}, \quad \alpha > 0$$

$$\phi_6(t) = t^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

ϕ_1 wird zum Nachweis der Transienz verwendet. Da diese Funktion streng monoton fallend und beschränkt ist, sind trivialerweise die Bedingungen (A0.1a) bzw. (A0.1b) und (A0.3) erfüllt. Alle anderen Funktionen erfüllen die Rekurrenzbedingung (A0.4), sodaß bei den Kriterien für Ergodizität die Rekurrenz nicht getrennt nachgewiesen werden muß. Diese Funktionen erfordern aber Momentenbedingungen der Form

$$\mathbb{E} \phi_i(\xi_k) < \infty \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

(nicht notwendig gleichmäßig), um die Bedingung (A0.1a) bzw. (A0.1b) zu erfüllen.

Für ϕ_6 läßt sich die zu untersuchende Summe (*) direkt berechnen, für ϕ_2 und ϕ_3 kann die Abschätzung teilweise mit Hilfe der Jensen-Ungleichung durchgeführt werden, in allen anderen Fällen aber muß man ausnutzen, daß die Funktionen ϕ_i auf $\mathbb{R}_+$ definiert und dort zweimal stetig differenzierbar sind. Durch Taylorentwicklung um $k \in \mathbb{N}$ in einer geeigneten Umgebung $U_k \subset \mathbb{R}$ von k erhält man

$$\phi(k+i-1) - \phi(k) = \phi'(k)(i-1) + \frac{1}{2} \phi''(\theta)(i-1)^2$$

wobei $\theta = k + \vartheta(i-1)$ für ein $\vartheta = \vartheta(k, i)$ mit $0 < \vartheta < 1$.

Für festes k ist dann θ eine Funktion von i .

Setzt man diese Entwicklung in den zu untersuchenden Ausdruck (*) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi(k+i-1) - \phi(k)] &= \\
 \sum_{i=0}^N p_i(k) [\phi'(k)(i-1) + \frac{1}{2} \phi''(\theta)(i-1)^2] &+ \\
 + \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) [\phi(k+i-1) - \phi(k)] &= \\
 \phi'(k) \left[m_k - 1 - \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k)(i-1) \right] &+ \\
 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N p_i(k) \phi''(\theta)(i-1)^2 &+ \\
 + \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) [\phi(k+i-1) - \phi(k)] &
 \end{aligned}$$

Wobei $N = [\delta k]$ für eine geeignete Konstante $\delta > 0$, die so gewählt sein muß, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ hinreichend groß das Intervall $[k-1, k+N-1] \subset \mathbb{R}$ im Entwicklungsbereich der Funktion ϕ um den Punkt k liegt. Da die zu untersuchenden Funktionen zumindest in $\{x+iy \in \mathbb{C}; x>0\}$ analytisch sind, ist $\delta = 1$ ein zulässiger Wert.

Zur Abkürzung der Schreibweise sei:

$$A_1(k) := \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k)(i-1)$$

$$A_2(k) := \sum_{i=0}^N p_i(k) \phi''(\theta)(i-1)^2$$

$$A_3(k) := \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) [\phi(k+i-1) - \phi(k)]$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi(k+i-1) - \phi(k)] &= \\
 \phi'(k) [m_k - 1 - A_1(k)] + \frac{1}{2} A_2(k) + A_3(k). &
 \end{aligned}$$

Die Hauptaufgabe im weiteren Verlauf dieses Kapitels besteht jetzt darin, die Ausdrücke $A_i(k)$, $i=1,2,3$, geeignet abzuschätzen. Der erste hängt nicht von ϕ ab, und für den zweiten kann ein Abschätzungsschritt durchgeführt werden, ohne die spezielle Form von ϕ explizit zu verwenden.

Satz 3.1.

Unter den Voraussetzungen (φ^*) und $C_k^\varphi < \infty$ gilt:

$$0 \leq A_1(k) \leq \frac{N}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi$$

(dies ist Lemma A1.1)

Satz 3.2.

$$|A_2(k)| \leq \sup_{0 \leq x \leq N} |\dot{\Phi}''(k-1+x)| \sum_{i=0}^N p_i(k)(i-1)^2$$

Falls $\dot{\Phi}''(t) \neq 0$ für $t \in \mathbb{R}_+$, so gilt zusätzlich:

$$|A_2(k)| \geq \inf_{0 \leq x \leq N} |\dot{\Phi}''(k-1+x)| \sum_{i=0}^N p_i(k)(i-1)^2$$

Beweis:

$$A_2(k) = \sum_{i=0}^N p_i(k) \dot{\Phi}''(\theta)(i-1)^2$$

$$a) |A_2(k)| \leq \sum_{i=0}^N p_i(k)(i-1)^2 |\dot{\Phi}''(\theta)| \leq$$

$$\max_{0 \leq i \leq N} |\dot{\Phi}''(\theta(i))| \sum_{i=0}^N p_i(k)(i-1)^2$$

$$\max_{0 \leq i \leq N} |\dot{\Phi}''(\theta(i))| \leq \max_{0 \leq i \leq N} \sup_{0 \leq \vartheta \leq 1} |\dot{\Phi}''(k+\vartheta(i-1))| =$$

$$\sup_{0 \leq x \leq N} |\dot{\Phi}''(k-1+x)|$$

$$b) |A_2(k)| = \sum_{i=0}^N p_i(k)(i-1)^2 |\dot{\Phi}''(\theta)| \geq$$

$$\min_{0 \leq i \leq N} |\dot{\Phi}''(\theta(i))| \sum_{i=0}^N p_i(k)(i-1)^2$$

$$\min_{0 \leq i \leq N} |\dot{\Phi}''(\theta(i))| \geq \min_{0 \leq i \leq N} \inf_{0 \leq \vartheta \leq 1} |\dot{\Phi}''(k+\vartheta(i-1))| =$$

$$\inf_{0 \leq x \leq N} |\dot{\Phi}''(k-1+x)| \quad \square$$

Satz 3.3.

Unter den Voraussetzungen (φ^*) , $C_k^\varphi < \infty$ und k hinreichend groß gilt für die Testfunktion $\Phi_1(t) = \frac{1}{\log(2+t)}$ folgende Ungleichung für vorgegebenes $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\Phi_1(k+i-1) - \Phi_1(k)] \leq \frac{1 - m_k + \frac{k}{\varphi(k)} \left[\frac{3}{2} + \frac{1+\varepsilon}{\log k} \right] C_k^\varphi + \frac{1}{2k} + \frac{1+\varepsilon}{k \log k}}{(k+2) \log^2(k+2)} \quad (1a)$$

$$\text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty.$$

$$\frac{1 - m_k + \frac{1}{k} C_k^{(2)} + \left[\frac{1}{2k} + \frac{1+\varepsilon}{k \log k} \right] [C_k^{(2)} - 2m_k + 1]}{(k+2) \log^2(k+2)} \quad (1b)$$

$$\text{falls } \varphi(t) = t^2.$$

$$\frac{1 - m_k + \frac{k}{\varphi(k)} C_k^\varphi + \left[\frac{1}{2k} + \frac{1+\varepsilon}{k \log k} \right] [\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2]}{(k+2) \log^2(k+2)} \quad (1c)$$

$$\text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0.$$

Beweis:

$$\Phi_1'(t) = \frac{-1}{(t+2) \log^2(t+2)}, \quad \Phi_1''(t) = \frac{2 + \log(t+2)}{(t+2)^2 \log^3(t+2)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) \left[\frac{1}{\log(k+i+1)} - \frac{1}{\log(k+2)} \right] = \\ \frac{-1}{(k+2) \log^2(k+2)} [m_k - 1 - A_1(k)] + \frac{1}{2} A_2(k) + A_3(k) \end{aligned}$$

Wähle $\delta = 1$, also $N = k$!

$$A_1(k) \leq \frac{k}{\varphi(k+1)} C_k^\varphi$$

(siehe Satz 3.1)

$$A_3(k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} p_i(k) \left[\frac{1}{\log(k+i+1)} - \frac{1}{\log(k+2)} \right] \leq 0$$

(dieser Ausdruck wird vernachlässigt)

$$(k+2) \log^2(k+2) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) \left[\frac{1}{\log(k+1+i)} - \frac{1}{\log(k+2)} \right] \leq$$

$$1 - m_k + \frac{k}{\varphi(k)} C_k^{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{A_2(k)}{|\Phi_1'(k)|}$$

$$|A_2(k)| \leq \sup_{0 \leq x \leq N} |\Phi_1''(k-1+x)| \sum_{i=0}^k p_i(k) (i-1)^2$$

(siehe Satz 3.2)

Da $\Phi_1''(t)$ positiv und monoton fallend ist, gilt:

$$\sup_{0 \leq x \leq N} |\Phi_1''(k-1+x)| = \Phi_1''(k-1)$$

Bleibt zu untersuchen:

$$\frac{1}{2} \frac{\Phi_1''(k-1)}{|\Phi_1'(k)|} = \frac{(k+2) \log^2(k+2) [2 + \log(k+1)]}{2(k+1)^2 \log^3(k+1)} =$$

$$\frac{1}{2k} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \frac{2 + \log(k+1)}{\log(k+1)} \frac{\log^2(k+2)}{\log^2(k+1)}$$

$$\left[\frac{\log(k+2)}{\log(k+1)} \right]^2 = \left[1 + \frac{\log(k+2) - \log(k+1)}{\log(k+1)} \right]^2 =$$

$$\left[1 + \frac{\log \frac{k+2}{k+1}}{\log(k+1)} \right]^2 = \left[1 + \frac{\log(1 + \frac{1}{k+1})}{\log(k+1)} \right]^2 <$$

$$\left[1 + \frac{1}{(k+1) \log(k+1)} \right]^2 < 1 + \frac{2}{k \log k}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\Phi_1''(k-1)}{|\Phi_1'(k)|} < \frac{1}{2k} \left[1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right] \left[1 + \frac{2}{\log k} \right] \left[1 + \frac{2}{k \log k} \right] <$$

$$\frac{1}{2k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] = \frac{1}{2k} + \frac{1+\varepsilon}{k \log k}$$

für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ falls k hinreichend groß.

Fallunterscheidung:

$$a) \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = \infty$$

$$\frac{1}{2} \frac{A_2(k)}{|\Phi_1'(k)|} \leq \left[\frac{1}{2k} + \frac{1+\varepsilon}{k \log k} \right] \left[1 + \frac{k^2}{\varphi(k)} C_k^{\varphi} \right]$$

(siehe Lemma A1.2)

$$b) \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) < \infty$$

$$\frac{1}{2} \frac{A_2(k)}{|\Phi_1^{(2)}(k)|} \leq \left[\frac{1}{2k} + \frac{1+\varepsilon}{k \log k} \right] [C_k^{(2)} - 2m_k + 1]$$

(siehe Lemma A1.3)

Direktes Einsetzen unter Berücksichtigung der drei Fälle

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = \begin{cases} \infty \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

liefert dann die Aussage des Satzes. $\square$

Satz 3.4.

Unter der Voraussetzung $m_k < \infty$ gilt für die Testfunktion $\Phi_2(t) = \log(1+t)$ folgende Ungleichung:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\Phi_2(k+i-1) - \Phi_2(k)] \leq \frac{1}{k+1} [m_k - 1] \quad (2a)$$

Unter den Voraussetzungen (φ^*) für eine Funktion φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = 0$, $C_k^\varphi < \infty$ und k hinreichend groß gilt die schärfere Ungleichung für vorgegebenes δ mit $0 < \delta < 1$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\Phi_2(k+i-1) - \Phi_2(k)] \leq \frac{1}{k+1} \left\{ m_k - 1 - \frac{1}{2(1+\delta)^2 k} [\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2] + (2+\delta) \frac{\delta k}{\varphi(\delta k)} C_k^\varphi \right\} \quad (2b)$$

Beweis:

Für Abschätzung (2a):

Aufgrund der Jensen-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i) - \log(k+1)] &\leq \\ \log \left[\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) (k+i) \right] - \log(k+1) &= \log(k+m_k) - \log(k+1) = \\ \log \left[\frac{k+m_k}{k+1} \right] = \log \left[1 + \frac{m_k-1}{k+1} \right] &\leq \frac{1}{k+1} [m_k - 1] \end{aligned}$$

Für Abschätzung (2b):

$$\Phi_2'(t) = \frac{1}{1+t} \quad , \quad \Phi_2''(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i) - \log(k+1)] =$$

$$\frac{1}{k+1} [m_k - 1 - A_1(k)] + \frac{1}{2} A_2(k) + A_3(k)$$

$$A_1(k) \geq 0$$

(dieser Ausdruck wird vernachlässigt)

$$|A_2(k)| \geq \inf_{0 \leq x \leq N} |\Phi_2''(k-1+x)| \sum_{i=0}^N p_i(k) (i-1)^2$$

(siehe Satz 3.2)

Da $\Phi_2''(t)$ negativ und betragsmäßig monoton fallend ist, gilt:

$$\inf_{0 \leq x \leq N} |\Phi_2''(k-1+x)| = |\Phi_2''(k-1+N)| = \frac{1}{(k+N)^2}$$

$$A_2(k) \leq - \frac{1}{(k+N)^2} \left[\sigma_k^2 + (m_k-1)^2 - \frac{N^2}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi \right]$$

(siehe Lemma A1.5)

$$A_3(k) = \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i) - \log(k+1)] \leq \frac{2}{k+1} \frac{N+1}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi$$

(siehe Lemma A1.6)

Die Addition der Abschätzungen liefert:

$$(k+1) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i) - \log(k+1)] \leq$$

$$m_k - 1 - \frac{k+1}{2(k+N)^2} [\sigma_k^2 + (m_k-1)^2]$$

$$+ \left[\frac{k+1}{2(k+N)^2} \frac{N^2}{\varphi(N+1)} + 2 \frac{N+1}{\varphi(N+1)} \right] C_k^\varphi =: B(k)$$

Wähle $N = [\delta k]$ für ein δ mit $0 < \delta < 1$. Mit $N \leq \delta k \leq N+1$ gilt dann für k hinreichend groß:

$$B(k) \leq m_k - 1 - \frac{k+1}{2[(1+\delta)k]^2} [\sigma_k^2 + (m_k-1)^2]$$

$$+ \left[\frac{k+1}{2[(1+\delta)k-1]^2} \frac{\delta^2 k^2}{\varphi(\delta k)} + 2 \frac{\delta k}{\varphi(\delta k)} \right] C_k^\varphi \leq$$

$$m_k - 1 - \frac{1}{2(1+\delta)^2 k} [\sigma_k^2 + (m_k-1)^2] + (2+\delta) \frac{\delta k}{\varphi(\delta k)} C_k^\varphi \quad \square$$

Satz 3.5.

Es sei $0 < \alpha < 1$. Unter der Voraussetzung $m_k < \infty$ gilt für die Testfunktion $\phi_3(t) = t^\alpha$ folgende Ungleichung:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi_3(k+i-1) - \phi_3(k)] \leq \alpha k^{\alpha-1} [m_k - 1] \quad (3a)$$

Unter den Voraussetzungen (φ^*) für eine Funktion φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$, $C_k^\varphi < \infty$ und k hinreichend groß gilt die schärfere Ungleichung für vorgegebenes δ mit $0 < \delta < 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi_3(k+i-1) - \phi_3(k)] \leq \\ \alpha k^{\alpha-1} \left\{ m_k - 1 - \frac{1-\alpha}{2(1+\delta)^{2-\alpha}} \frac{1}{k} [\sigma_k^2 + (m_k-1)^2] \right. \\ \left. + (1 + \frac{1}{\alpha} + \delta) \frac{\delta k}{\varphi(\delta k)} C_k^\varphi \right\} \end{aligned} \quad (3b)$$

Beweis:

Für Ungleichung (3a):

Aufgrund der Jensen-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^\alpha - k^\alpha] &\leq \\ \left[\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) (k+i-1) \right]^\alpha - k^\alpha &= [k+m_k-1]^\alpha - k^\alpha = \\ k^\alpha \left[\left(1 + \frac{m_k-1}{k} \right)^\alpha - 1 \right] &\leq \alpha k^{\alpha-1} [m_k - 1] \end{aligned}$$

Für Ungleichung (3b):

$$\phi_3'(t) = \alpha t^{\alpha-1}, \quad \phi_3''(t) = -\alpha(1-\alpha)t^{\alpha-2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^\alpha - k^\alpha] &= \\ \frac{\alpha}{k^{1-\alpha}} [m_k - 1 - A_1(k)] + \frac{1}{2} A_2(k) + A_3(k) \end{aligned}$$

$$A_1(k) \geq 0$$

(dieser Ausdruck wird vernachlässigt)

$$|A_2(k)| \geq \inf_{0 \leq x \leq N} |\Phi_3''(k-1+x)| \sum_{i=0}^N p_i(k) (i-1)^2$$

(siehe Satz 3.2)

Da $\Phi_3''(t)$ negativ und betragsmäßig monoton fallend ist, gilt:

$$\inf_{0 \leq x \leq N} |\Phi_3''(k-1+x)| = |\Phi_3''(k-1+N)| = \frac{\alpha(1-\alpha)}{(k+N-1)^{2-\alpha}}$$

$$A_2(k) \leq - \frac{\alpha(1-\alpha)}{(k+N-1)^{2-\alpha}} \left[\sigma_k^2 + (m_k-1)^2 - \frac{N^2}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi \right]$$

(siehe Lemma A1.5)

$$A_3(k) = \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^\alpha - k^\alpha] \leq$$

$$\alpha k^{\alpha-1} \left[1 + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{k}{k+N} \right]^{1-\alpha} \right] \frac{N+1}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi$$

(siehe Lemma A1.7)

Die Addition der Abschätzungen liefert:

$$\alpha^{-1} k^{1-\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^\alpha - k^\alpha] \leq$$

$$m_k - 1 - \frac{(1-\alpha)k^{1-\alpha}}{2(k+N-1)^{2-\alpha}} \left[\sigma_k^2 + (m_k-1)^2 - \frac{N^2}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi \right]$$

$$+ \left[1 + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{k}{k+N} \right]^{1-\alpha} \right] \frac{N+1}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi =$$

$$m_k - 1 - \frac{(1-\alpha)k^{1-\alpha}}{2(k+N-1)^{2-\alpha}} [\sigma_k^2 + (m_k-1)^2] +$$

$$\left\{ \frac{(1-\alpha)k^{1-\alpha}}{2(k+N-1)^{2-\alpha}} \frac{N^2}{\varphi(N+1)} + \left[1 + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{k}{k+N} \right]^{1-\alpha} \right] \frac{N+1}{\varphi(N+1)} \right\} C_k^\varphi =: B(k)$$

Wähle $N = [\delta k]$ für ein δ mit $0 < \delta < 1$. Mit $N \leq \delta k \leq N+1$ gilt dann für k hinreichend groß:

$$B(k) \leq m_k - 1 - \frac{(1-\alpha)k^{1-\alpha}}{2[(1+\delta)k]^{2-\alpha}} [\sigma_k^2 + (m_k-1)^2] +$$

$$\left\{ \frac{(1-\alpha)k^{1-\alpha}}{2[(1+\delta)k-2]^{2-\alpha}} \frac{\delta^2 k^2}{\varphi(\delta k)} + \left[1 + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{k}{(1+\delta)k-1} \right]^{1-\alpha} \right] \frac{\delta k}{\varphi(\delta k)} \right\} C_k^\varphi \leq$$

$$m_k - 1 - \frac{1-\alpha}{2(1+\delta)^{2-\alpha} k} [\sigma_k^2 + (m_k-1)^2]$$

$$+ \left[1 + \frac{1}{\alpha} + \delta \right] \frac{\delta k}{\varphi(\delta k)} C_k^\varphi \quad \square$$

Satz 3.6.

Es sei $0 < \alpha < 1$. Unter den Voraussetzungen (φ^*) für eine Funktion φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1+\alpha}/\varphi(t) \neq 1$, $C_k^\varphi < \infty$ und k hinreichend groß gilt für die Testfunktion $\phi_4(t) = t^{1+\alpha}$ folgende Ungleichung:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi_4(k+i-1) - \phi_4(k)] \leq$$

$$(1+\alpha)k^\alpha \left\{ m_k - 1 + \left[\frac{\alpha}{2} \left[\frac{k}{k-1} \right]^{1-\alpha} + \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right] \frac{k}{\varphi(k)} C_k^\varphi \right. \quad (4a)$$

$$\left. + \left[\frac{k}{k-1} \right]^{1-\alpha} \frac{\alpha}{k} \right\}$$

falls $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty$.

$$(1+\alpha)k^\alpha \left\{ m_k - 1 + \frac{\alpha}{2} \left[\frac{k}{k-1} \right]^{1-\alpha} \frac{1}{k} [C_k^{(2)} - 2m_k + 1] \right. \quad (4b)$$

$$\left. + \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{1}{k} C_k^{(2)} \right\}$$

falls $\varphi(t) = t^2$.

$$(1+\alpha)k^\alpha \left\{ m_k - 1 + \frac{\alpha}{2} \left[\frac{k}{k-1} \right]^{1-\alpha} \frac{1}{k} [\sigma_k^2 + (m_k-1)^2] \right. \quad (4c)$$

$$\left. + \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{k}{\varphi(k+1)} C_k^\varphi \right\}$$

falls $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$.

Beweis:

$$\phi_4'(t) = (1+\alpha)t^\alpha, \quad \phi_4''(t) = \alpha(1+\alpha)t^{\alpha-1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{1+\alpha} - k^{1+\alpha}] =$$

$$(1+\alpha)k^\alpha [m_k - 1 - A_1(k)] + \frac{1}{2} A_2(k) + A_3(k)$$

Wähle $\delta = 1$, also $N(k) = k$!

$$A_1 \geq 0$$

(dieser Ausdruck wird vernachlässigt)

$$A_2(k) \leq \sup_{0 \leq x \leq k} |\Phi_4''(k-1+x)| \sum_{i=0}^k p_i(k)(i-1)^2$$

(siehe Satz 3.2)

Da $\Phi_4''(t)$ positiv ist und monoton fällt, gilt:

$$\sup_{0 \leq x \leq k} |\Phi_4''(k-1+x)| = \Phi_4''(k-1) = \alpha(1+\alpha)(k-1)^{\alpha-1}$$

Fallunterscheidung:

a) $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty$

$$A_2(k) \leq \alpha(1+\alpha)(k-1)^{\alpha-1} \left[1 + \frac{k^2}{\varphi(k)} C_k^\varphi \right]$$

(siehe Lemma A1.2)

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) < \infty$

$$A_2(k) \leq \alpha(1+\alpha)(k-1)^{\alpha-1} [C_k^{(2)} - 2m_k + 1]$$

(siehe Lemma A1.3)

$$A_3(k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{1+\alpha} - k^{1+\alpha}] \leq 2^{1+\alpha} \frac{k^{1+\alpha}}{\varphi(k+1)} C_k^\varphi$$

(siehe Lemma A1.8)

Die Addition der Abschätzungen führt dann zu

$$\frac{1}{(1+\alpha)k^\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{1+\alpha} - k^{1+\alpha}]$$

$$\leq \begin{cases} B_1(k) & \text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty \\ B_2(k) & \text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 1 \\ B_3(k) & \text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0 \end{cases}$$

Wobei:

$$B_1(k) = m_k - 1 + \frac{\alpha}{2k^\alpha} (k-1)^{\alpha-1} \left[1 + \frac{k^2}{\varphi(k)} C_k^\varphi \right] + \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{k}{\varphi(k+1)} C_k^\varphi$$

$$\leq m_k - 1 + \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{k}{k-1} \right)^{1-\alpha} + \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right] \frac{k}{\varphi(k)} C_k^\varphi + \left(\frac{k}{k-1} \right)^{1-\alpha} \frac{\alpha}{k}$$

$$B_2(k) = m_k - 1 + \frac{\alpha}{2k^\alpha} (k-1)^{\alpha-1} [C_k^{(2)} - 2m_k + 1] + \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{1}{k} C_k^{(2)}$$

$$= m_k - 1 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{k}{k-1} \right)^{1-\alpha} \frac{1}{k} [C_k^{(2)} - 2m_k + 1] + \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{1}{k} C_k^{(2)}$$

$$B_3(k) = m_k - 1 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{k}{k-1} \right)^{1-\alpha} \frac{1}{k} [\sigma_k^2 + (m_k-1)^2] + \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{k}{\varphi(k+1)} C_k^\varphi \quad \square$$

Satz 3.7.

Es sei $\alpha > 0$. Unter den Voraussetzungen (φ^*) für eine Funktion φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{2+\alpha}/\varphi(t) \leq 1$, $C_k^\varphi < \infty$ und k hinreichend groß gilt für die Testfunktion $\phi_5(t) = t^{2+\alpha}$ folgende Ungleichung:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi_5(k+i-1) - \phi_5(k)] \leq$$

$$(2+\alpha)k^{1+\alpha} \left\{ m_k - 1 + (1+\alpha)2^\alpha \frac{1}{k} [\sigma_k^2 + (m_k-1)^2] \right. \quad (5)$$

$$\left. + \frac{2^{2+\alpha}}{2+\alpha} \frac{k}{\varphi(k+1)} C_k^\varphi \right\}$$

Beweis:

$$\phi_5'(t) = (2+\alpha)t^{1+\alpha}, \quad \phi_5''(t) = (1+\alpha)(2+\alpha)t^\alpha$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{2+\alpha} - k^{2+\alpha}] =$$

$$(2+\alpha)k^{1+\alpha} [m_k - 1 - A_1(k)] + \frac{1}{2} A_2(k) + A_3(k)$$

Wähle $\delta = 1$, also $N(k) = k$!

$$A_1 \geq 0$$

(dieser Ausdruck wird vernachlässigt)

$$A_2(k) \leq \sup_{0 \leq x \leq k} |\phi_5''(k-1+x)| \sum_{i=0}^k p_i(k) (i-1)^2$$

(siehe Satz 3.2)

Da $\Phi_5''(t)$ positiv ist und monoton steigt, gilt:

$$\sup_{0 \leq x \leq k} |\Phi_5''(k-1+x)| = \Phi_5''(2k-1) = (1+\alpha)(2+\alpha)(2k-1)^\alpha$$

$$A_2(k) \leq (1+\alpha)(2+\alpha)(2k-1)^\alpha [C_k^{(2)} - 2m_k + 1]$$

(siehe Lemma A1.3)

$$A_3(k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{2+\alpha} - k^{2+\alpha}] \leq 2^{2+\alpha} \frac{k^{2+\alpha}}{\varphi(k+1)} C_k^\varphi$$

(siehe Lemma A1.8)

Die Addition der Abschätzungen führt dann zu

$$\frac{1}{(2+\alpha)k^{1+\alpha}} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{2+\alpha} - k^{2+\alpha}] \leq$$

$$m_k - 1 + (1+\alpha)2^\alpha \frac{1}{k} [\sigma_k^2 + (m_k-1)^2] + \frac{2^{2+\alpha}}{2+\alpha} \frac{k}{\varphi(k+1)} C_k^\varphi \quad \square$$

Satz 3.8.

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Unter der Voraussetzung $C_k^{(n)} < \infty$ gilt für die Testfunktion $\Phi_6(t) = t^n$ folgende Gleichung:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\Phi_6(k+i-1) - \Phi_6(k)] =$$

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} k^{n-j} \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} C_k^{(l)} \quad (6)$$

Beweis:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^n - k^n] =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} k^{n-j} (i-1)^j =$$

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} k^{n-j} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} i^l =$$

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} k^{n-j} \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} C_k^{(l)} \quad \square$$

Korollar 3.8.

Unter der Voraussetzung $m_k < \infty$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1) - k] = m_k - 1 \quad (6a)$$

Unter der Voraussetzung $\sigma_k^2 < \infty$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^2 - k^2] = 2k[m_k - 1] + \sigma_k^2 + (m_k - 1)^2 \quad (6b)$$

4. Transienz

Die Bedingungen für Transienz werden mit Hilfe der Testfunktion $\phi_1(x) = \frac{1}{\log(2+x)}$ entwickelt. Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen sind die in Satz 3.3 angegebenen Abschätzungen. Die dort notwendige Fallunterscheidung bezüglich der Existenz höherer Momente muß weiter beibehalten werden. Dabei gilt es jeweils nachzuweisen, daß unter geeigneten Momentenbedingungen die folgende Ungleichung für alle k hinreichend groß erfüllt ist (siehe Satz A0.4):

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi_1(k+i-1) - \phi_1(k)] \leq 0 \quad (T^*)$$

Satz 4.1.

Es gelte $C_k^\varphi < \infty$ für alle k hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty$ erfüllt.

Falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ transient:

$$a) m_k - 1 \geq \frac{k}{\varphi(k)} \left[\frac{3}{2} + \frac{1+\varepsilon}{\log k} \right] C_k^\varphi + \frac{1}{2k} + \frac{1+\varepsilon}{k \log k} \quad (1a)$$

für ein $\varepsilon > 0$ und alle k hinreichend groß.

$$b) m_k - 1 \geq (1+\varepsilon) \left[\frac{3k}{2\varphi(k)} C_k^\varphi + \frac{1}{2k} \right] \quad (1b)$$

für ein $\varepsilon > 0$ und alle k hinreichend groß.

$$c) \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(k)(m_k - 1)}{k C_k^\varphi} > \frac{3}{2} \quad (1c)$$

Beweis:

Ungleichung (3.1a) von Satz 3.3 ist äquivalent zu

$$(k+2) \log^2(k+2) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) \left[\frac{1}{\log(k+i+1)} - \frac{1}{\log(k+2)} \right] \leq$$

$$1 - m_k + \frac{k}{\varphi(k)} \left[\frac{3}{2} + \frac{1+\varepsilon}{\log k} \right] C_k^\varphi + \frac{1}{2k} + \frac{1+\varepsilon}{k \log k} =: D_{11}(k).$$

Für beliebig vorgegebenes $\varepsilon' > 0$ gilt dann

$$D_{11}(k) \leq 1 - m_k + (1+\varepsilon') \left[\frac{3k}{2\varphi(k)} C_k^\varphi + \frac{1}{2k} \right] =: D_{12}(k)$$

für alle k hinreichend groß.

$D_{11}(k) \leq 0$ bzw. $D_{12}(k) \leq 0$ für $k \geq N_0$ (N_0 vorgegeben) sind äquivalent zu den Bedingungen (1a) bzw. (1b) des Satzes.

$D_{11}(k) \leq 0$ läßt sich umschreiben zu

$$\varphi(k)(m_k - 1) \geq k C_k^\varphi \left[\frac{3}{2} + \frac{1+\varepsilon}{\log k} \right] + \frac{\varphi(k)}{2k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] \quad \text{oder}$$

$$\frac{\varphi(k)(m_k - 1)}{k C_k^\varphi} \geq \frac{3}{2} + \frac{1+\varepsilon}{\log k} + \frac{\varphi(k)}{2k^2 C_k^\varphi} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right]$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, $\liminf_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi > 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t^2 = 0$, ist die letzte Ungleichung unter der Bedingung (1c) des Satzes für k hinreichend groß erfüllt. $\square$

Korollar 4.2.

Es gelte $C_k^\varphi < \infty$ für alle k hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty$ erfüllt.

Falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ transient:

a) $\liminf_{k \rightarrow \infty} m_k > 1$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

b) $\liminf_{k \rightarrow \infty} \log k (m_k - 1) > 0$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

$$\text{für ein } \varphi \text{ mit } \lim_{t \rightarrow \infty} (t \log t)/\varphi(t) = 0.$$

c) $\liminf_{k \rightarrow \infty} k^\alpha (m_k - 1) = a, \quad 0 < a < \infty$

für ein α mit $0 < \alpha < 1$,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^{(1+\alpha)} < \frac{2a}{3}$$

$$d) \liminf_{k \rightarrow \infty} k^\alpha (m_k - 1) > 0$$

für ein α mit $0 < \alpha < 1$,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1+\alpha}/\varphi(t) = 0$.

Beweis:

$$a) \frac{k}{\varphi(k)} = o(1)$$

$m_k - 1 \geq \varepsilon'$ für ein $\varepsilon' > 0$, wenn k hinreichend groß.

$$(1+\varepsilon) \left[\frac{3k}{2\varphi(k)} C_k^\varphi + \frac{1}{2k} \right] = o(1)$$

Somit ist Bedingung (1b) erfüllt.

$$b) \frac{k}{\varphi(k)} = o(1/\log k)$$

$m_k - 1 \geq \frac{\varepsilon'}{\log k}$ für ein $\varepsilon' > 0$, wenn k hinreichend groß.

$$(1+\varepsilon) \left[\frac{3k}{\varphi(k)} C_k^\varphi + \frac{1}{2k} \right] = o(1/\log k)$$

Somit ist Bedingung (1b) erfüllt.

$$c) \varphi(x) = x^{1+\alpha}$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k^\alpha (m_k - 1) > \frac{3}{2} \limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^{(1+\alpha)}$$

Somit ist Bedingung (1c) erfüllt.

$$d) \frac{k}{\varphi(k)} = o(k^{-\alpha})$$

$m_k - 1 \geq \varepsilon' k^{-\alpha}$ für ein $\varepsilon' > 0$, wenn k hinreichend groß.

$$(1+\varepsilon) \left[\frac{3k}{\varphi(k)} C_k^\varphi + \frac{1}{2k} \right] = o(k^{-\alpha})$$

Somit ist wiederum Bedingung (1b) erfüllt. $\square$

Satz 4.3.

Es gelte $C_k^{(2)} < \infty$ für alle k hinreichend groß.

Falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ transient:

$$a) m_k - 1 \geq \frac{1}{k} C_k^{(2)} + \frac{1}{2k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] [C_k^{(2)} - 2m_k + 1] \quad (2a)$$

für ein $\varepsilon > 0$ und alle k hinreichend groß.

$$b) m_k - 1 \geq (1+\varepsilon) \frac{3}{2k} C_k^{(2)} \quad (2b)$$

für ein $\varepsilon > 0$ und alle k hinreichend groß.

$$c) \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k(m_k - 1)}{C_k^{(2)}} > \frac{3}{2} \quad (2c)$$

Beweis:

Ungleichung (3.1b) von Satz 3.3 ist äquivalent zu

$$(k+2) \log^2(k+2) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) \left[\frac{1}{\log(k+i+1)} + \frac{1}{\log(k+2)} \right] \leq$$

$$1 - m_k + \frac{1}{k} C_k^{(2)} + \frac{1}{2k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] [C_k^{(2)} - 2m_k + 1] =$$

$$1 + \frac{1}{2k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] - m_k \left\{ 1 + \frac{1}{k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] \right\}$$

$$+ \frac{1}{2k} \left[3 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] C_k^{(2)} =: D_{21}(k)$$

Für beliebig vorgegebenes $\varepsilon' > 0$ gilt dann

$$D_{21}(k) \left[1 + \frac{1}{k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] \right]^{-1} \leq$$

$$1 - m_k + (1+\varepsilon') \frac{3}{2k} C_k^{(2)} =: D_{22}(k)$$

für alle k hinreichend groß.

$D_{21}(k) \leq 0$ bzw. $D_{22}(k) \leq 0$ für $k \geq N_0$ (N_0 vorgegeben) sind äquivalent zu den Bedingungen (2a) bzw. (2b) des Satzes.

$D_{22}(k) \leq 0$ läßt sich umschreiben zu

$$k(m_k - 1) \geq (1 + \varepsilon') \frac{3}{2} C_k^{(2)} \quad \text{oder}$$

$$\frac{k(m_k - 1)}{C_k^{(2)}} \geq \frac{3}{2}(1 + \varepsilon')$$

für beliebig kleines $\varepsilon' > 0$ und alle k hinreichend groß.

Diese letzte Ungleichung ist unter der Bedingung (2c) des Satzes erfüllt. $\square$

Korollar 4.4.

Es gelte $C_k^{(2)} < \infty$ für alle k hinreichend groß,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} m_k = 1,$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k(m_k - 1) = a, \quad 1 < a < \infty.$$

Unter jeder der folgenden Zusatzbedingungen ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ transient:

$$a) \limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^{(2)} < \frac{2a}{3}$$

$$b) \limsup_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 < \frac{2(a-1)}{3}$$

Beweis:

$$a) \liminf_{k \rightarrow \infty} k(m_k - 1) > \frac{3}{2} \limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^{(2)} > 0$$

Somit ist Bedingung (2c) erfüllt.

$$b) \limsup_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 < \frac{2(a'-1)}{3}$$

$$\text{wobei } \varepsilon' := \frac{1}{2}(a - a') > 0$$

$k(m_k - 1) \geq a - \varepsilon'$ für alle k hinreichend groß.

$$C_k^{(2)} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right) [C_k^{(2)} - 2m_k + 1] =$$

$$\sigma_k^2 + m_k^2 + \frac{1}{2} (1 + o(1)) [\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2] =$$

$$1 + \frac{3}{2} \sigma_k^2 + o(1) \leq a' + \varepsilon' = a - \varepsilon'$$

für alle k hinreichend groß.

Somit ist Bedingung (2a) erfüllt. $\square$

Satz 4.5.

Es gelte $C_k^\varphi < \infty$ für alle k hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$ erfüllt.

Falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ transient:

$$a) m_k - 1 \geq \frac{k}{\varphi(k)} C_k^\varphi + \frac{1}{2k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] [C_k^{(2)} - 2m_k + 1] \quad (3a)$$

für ein $\varepsilon > 0$ und alle k hinreichend groß.

$$b) m_k - 1 \geq \frac{k}{\varphi(k)} C_k^\varphi + \frac{1+\varepsilon}{2k} C_k^{(2)} \quad (3b)$$

für ein $\varepsilon > 0$ und alle k hinreichend groß.

$$c) \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k(m_k - 1)}{C_k^{(2)}} > \frac{1}{2} + \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 C_k^\varphi}{\varphi(k) C_k^{(2)}} \quad (3c)$$

$$d) \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k(m_k - 1)}{C_k^{(2)}} > \frac{1}{2} \quad (3d)$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

Beweis:

Ungleichung (3.1c) von Satz 3.3 ist äquivalent zu

$$(k+2) \log^2(k+2) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) \left[\frac{1}{\log(k+i+1)} + \frac{1}{\log(k+2)} \right] \leq$$

$$1 - m_k + \frac{k}{\varphi(k)} C_k^\varphi + \frac{1}{2k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] [C_k^{(2)} - 2m_k + 1] =$$

$$1 + \frac{1}{2k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] - m_k \left[1 + \frac{1}{k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] \right]$$

$$+ \frac{k}{\varphi(k)} C_k^\varphi + \frac{1}{2k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] C_k^{(2)} =: D_{31}(k)$$

Für beliebig vorgegebenes $\varepsilon' > 0$ gilt dann

$$D_{31}(k) \left[1 + \frac{1}{k} \left[1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k} \right] \right]^{-1} \leq$$

$$1 - m_k + \frac{1+\varepsilon'}{2k} C_k^{(2)} + \frac{k}{\varphi(k)} C_k^\varphi =: D_{32}(k)$$

für alle k hinreichend groß.

$D_{31}(k) \leq 0$ bzw. $D_{32}(k) \leq 0$ für $k \geq N_0$ (N_0 vorgegeben) sind äquivalent zu den Bedingungen (3a) bzw. (3b) des Satzes.

$D_{32}(k) \leq 0$ läßt sich umschreiben zu

$$k(m_k - 1) \geq \frac{1+\varepsilon'}{2} C_k^{(2)} + \frac{k^2}{\varphi(k)} C_k^\varphi \quad \text{oder}$$

$$\frac{k(m_k - 1)}{C_k^{(2)}} \geq \frac{1+\varepsilon'}{2} + \frac{k^2}{\varphi(k)} \frac{C_k^\varphi}{C_k^{(2)}}$$

für beliebig kleines $\varepsilon' > 0$ und alle k hinreichend groß.

Diese Ungleichung ist unter den Bedingungen (3c) und (3d) des Satzes erfüllt, wobei im letzten Fall der zweite Summand der rechten Seite wegen $\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$ gegen 0 strebt. $\square$

Korollar 4.6.

Es gelte $C_k^\varphi < \infty$ für alle k hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$ erfüllt.

Der Prozeß $\{Z(t)\}$ ist transient, falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} m_k = 1$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k(m_k - 1) = a, \quad 0 < a < \infty$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 < 2a$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

Beweis:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 < 2a'$$

$$\text{wobei } \varepsilon' := \frac{1}{2}(a - a') > 0$$

$$k(m_k - 1) \geq a - \varepsilon' \quad \text{für alle } k \text{ hinreichend groß.}$$

$$\frac{k^2}{\varphi(k)} C_k^\varphi + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{\log k}\right) [C_k^{(2)} - 2m_k + 1] =$$

$$o(1) + \frac{1}{2} (1 + o(1)) [\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2] =$$

$$\frac{1}{2} \sigma_k^2 + o(1) \leq a' + \varepsilon' = a - \varepsilon'$$

für alle k hinreichend groß.

Somit ist Bedingung (3a) erfüllt. $\square$

Korollar 4.7.

Es sei:

$$H_1 := \left\{ k \in \mathbb{N} : C_k^\varphi < \infty \text{ für eine feste Funktion } \varphi, \text{ die } (\varphi^*) \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty \text{ erfüllt, } m_k \text{ und } C_k^\varphi \text{ erfüllen Ungleichung (1a)} \right\}$$

$$H_2 := \left\{ k \in \mathbb{N} : C_k^{(2)} < \infty, m_k \text{ und } C_k^{(2)} \text{ erfüllen Ungleichung (2a)} \right\}$$

$$H_3 := \left\{ k \in \mathbb{N} : C_k^\varphi < \infty \text{ für eine feste Funktion } \varphi, \text{ die } (\varphi^*) \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0 \text{ erfüllt, } m_k, \sigma_k^2 \text{ und } C_k^\varphi \text{ erfüllen Ungleichung (3a)} \right\}$$

$$H_0 := \left\{ k \in \mathbb{N} : k \notin H_i \text{ für } i=1,2,3 \right\}$$

Falls H_0 endlich, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ transient.

Beweis:

Da zum Beweis der drei Sätze 4.1, 4.3 und 4.5 jeweils die gleiche Testfunktion $\phi_1(x) = \frac{1}{\log(2+x)}$ verwendet wurde, existiert ein $N_0 > 0$ sodaß

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi_1(k+i-1) - \phi_1(k)] \leq 0$$

für alle $k \geq N_0$, wenn H_0 endlich ist. $\square$

Anmerkung 4.8.

Korollar 4.7 erlaubt es, zum Nachweis der Transienz für einen Prozeß verschiedene Kriterien zu verwenden und die am leichtesten nachzuprüfenden auszusuchen. Insbesondere bedeutet dies, daß die Voraussetzung

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} m_k = 1$$

bei den Korollaren 4.4 und 4.6 keine echte Einschränkung darstellt, denn auf jede Teilfolge, die diese Voraussetzung nicht erfüllt, läßt sich Korollar 4.2.a anwenden.

5. Rekurrenz

Die Bedingungen für Rekurrenz werden mit Hilfe der Testfunktion $\phi_2(x) = \log(1+x)$ entwickelt. Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen sind die in Satz 3.4 angegebenen Abschätzungen. Die dort notwendige Fallunterscheidung bezüglich der Existenz eines Momentes von höherer als zweiter Ordnung muß weiter beibehalten werden. Dabei gilt es jeweils nachzuweisen, daß unter geeigneten Momentenbedingungen die folgende Ungleichung für alle k hinreichend groß erfüllt ist (siehe Satz A0.5):

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi_2(k+i-1) - \phi_2(k)] \leq 0 \quad (R^*)$$

Da ϕ_2 aber nicht beschränkt ist, muß, damit ϕ_2 überhaupt als Testfunktion anwendbar ist,

$$E\phi_2(\xi_k) < \infty \quad (R^{**})$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gefordert werden. Dies folgt aber schon z.B. aus $m_k < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Satz 5.1.

Es sei

$$E \log(1+\xi_k) < \infty \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Falls

$$m_k \leq 1 \quad \text{für alle } k \text{ hinreichend groß,} \quad (1)$$

so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ rekurrent

Beweis:

Ungleichung (3.2a) von Satz 3.4 ist äquivalent zu

$$(k+1) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i) - \log(k+1)] \leq m_k - 1. \quad \square$$

Satz 5.2.

Es gelte $C_k^\varphi < \infty$ für alle k hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$ erfüllt, und es sei

$$E \log(1 + \xi_k) < \infty \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ rekurrent:

$$a) \quad m_k - 1 \leq \frac{1}{2(1+\delta)^2 k} [\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2] - (2+\delta) \frac{\delta k}{\varphi(\delta k)} C_k^\varphi \quad (2a)$$

für ein $\delta > 0$ und alle k hinreichend groß.

$$b) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k(m_k - 1)}{\sigma_k^2} < \frac{1}{2} \quad (2b)$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi / \sigma_k^2 < \infty$$

Beweis:

Ungleichung (3.2b) von Satz 3.4 ist äquivalent zu

$$(k+1) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i) - \log(k+1)] \leq$$

$$m_k - 1 - \frac{1}{2(1+\delta)^2 k} [\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2] + (2+\delta) \frac{\delta k}{\varphi(\delta k)} C_k^\varphi =: D_{41}(k)$$

$D_{41}(k) \leq 0$ für $k \geq N_0$ (N_0 vorgegeben) ist äquivalent zu Bedingung (2a) des Satzes.

$D_{41}(k) \leq 0$ läßt sich umschreiben zu

$$k(m_k - 1) \leq \frac{1}{2(1+\delta)^2} [\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2] - (2+\delta) \frac{\delta k^2}{\varphi(\delta k)} C_k^\varphi$$

oder

$$\frac{k(m_k - 1)}{\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2} \leq \frac{1}{2(1+\delta)^2} - \frac{2+\delta}{\delta} \frac{(\delta k)^2}{\varphi(\delta k)} \frac{C_k^\varphi}{\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2}$$

Es genügt zu zeigen, daß diese Ungleichung unter der Bedingung (2b) des Satzes erfüllt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$.

Falls $m_k > 1$:

$$\frac{k(m_k - 1)}{\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2} \leq \frac{k(m_k - 1)}{\sigma_k^2} \leq \frac{1}{2} - \varepsilon$$

für ein $\varepsilon > 0$ und alle k hinreichend groß.

Falls $m_k \leq 1$:

$$\frac{k(m_k - 1)}{\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2} \leq 0 \leq \frac{1}{2} - \varepsilon$$

für ein $\varepsilon > 0$ und alle k hinreichend groß.

$\delta > 0$ läßt sich so wählen, daß für festes $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2(1+\delta)^2} \geq \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$$

Da $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$, gilt für ε und δ vorgegeben

$$\frac{2+\delta}{\delta} \frac{(\delta k)^2}{\varphi(\delta k)} \frac{C_k^\varphi}{\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2} \leq \frac{2+\delta}{\delta} \frac{(\delta k)^2}{\varphi(\delta k)} \frac{C_k^\varphi}{\sigma_k^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle k hinreichend groß.

Somit ist Bedingung (2a) erfüllt. $\square$

Anmerkung 5.3.

Aufgrund der Bedingungen an m_k in den Sätzen 5.1 und 5.2 existiert jeweils ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß $m_k < \infty$ für alle $k \geq N$. Damit reduziert sich die Bedingung

$$E \log(1 + \xi_k) < \infty \quad \text{für alle } k \geq 1$$

in diesen Sätzen zu

$$E \log(1 + \xi_k) < \infty \quad \text{für } 1 \leq k < N.$$

Nach Theorem 2 und der Vorbemerkung über den abzählbaren Zustandsraum in Tweedie (1975) ist Rekurrenz eine Eigenschaft einer Markoffschen Kette, die robust ist gegenüber Änderungen der Übergangsmatrix in endlich vielen Zeilen und Spalten. In unserem Spezialfall sind dies aber Änderungen bei endlich vielen Nachkomensverteilungen, und damit kann auf eine Bedingung der Form

$$E \log(1 + \xi_k) < \infty$$

ganz verzichtet werden.

Korollar 5.4.

Es gelte $C_k^\varphi < \infty$ für alle k hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$ erfüllt.

Falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ rekurrent:

a) $\limsup_{k \rightarrow \infty} k(m_k - 1) = a, \quad 0 < a < \infty$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 > 2a$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

b) $\limsup_{k \rightarrow \infty} (k \log k)(m_k - 1) < \infty$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 > 0$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

c) $\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{1+\alpha}(m_k - 1) = a, \quad 0 < a < \infty$

für ein α mit $0 < \alpha < 1$,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k^\alpha \sigma_k^2 > 2a$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{2+\alpha}/\varphi(t) = 0$.

d) $\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{1+\alpha}(m_k - 1) < \infty$

für ein $\alpha > 0$,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k^{\alpha'} \sigma_k^2 > 0$$

für ein α' mit $0 < \alpha' < \min(\alpha, 1)$,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{2+\alpha'}/\varphi(t) = 0$.

Beweis:

$$a) \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k(m_k - 1)}{\sigma_k^2} \leq \frac{\limsup_{k \rightarrow \infty} k(m_k - 1)}{\liminf_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2} < \frac{1}{2}$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{C_k^\varphi}{\sigma_k^2} \leq \frac{\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi}{\liminf_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2} < \infty$$

Somit ist Bedingung (2b) von Satz 5.2 erfüllt.

$$b) k(m_k - 1) = o(1)$$

$$\frac{1}{2(1+\delta)^2} [\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2] - \frac{2+\delta}{\delta} \frac{(\delta k)^2}{\varphi(k)} C_k^\varphi =$$

$$\frac{1}{2(1+\delta)^2} [\sigma_k^2 + o(1/k^2)] - o(1) \geq \varepsilon > 0$$

für alle k hinreichend groß.

Somit ist Bedingung (2a) von Satz 5.2 erfüllt.

$$c) \liminf_{k \rightarrow \infty} k^\alpha \sigma_k^2 = 2a'$$

$$\text{wobei } \varepsilon := \frac{1}{4}(a' - a) > 0$$

$$k^{1+\alpha}(m_k - 1) \leq a + \varepsilon$$

für alle k hinreichend groß.

Wähle δ so klein, daß

$$\frac{a' - \varepsilon}{(1+\delta)^2} \geq a' - 2\varepsilon = a + 2\varepsilon$$

$$\frac{k^\alpha}{2(1+\delta)^2} \sigma_k^2 \geq \frac{a' - \varepsilon}{(1+\delta)^2} \geq a + 2\varepsilon$$

für alle k hinreichend groß.

$$\frac{2+\delta}{\delta^{1+\alpha}} \frac{(\delta k)^{2+\alpha}}{\varphi(k)} C_k^\varphi \leq \varepsilon$$

für alle k hinreichend groß.

Zusammengefaßt ergibt dies

$$\frac{k^\alpha}{2(1+\delta)^2} [\sigma_k^2 + (m_k - 1)^2] - \frac{2+\delta}{\delta^{1+\alpha}} \frac{(\delta k)^{2+\alpha}}{\varphi(k)} C_k^\varphi \geq a + \varepsilon.$$

Somit ist Bedingung (2a) von Satz 5.2 erfüllt.

$$d) k^{1+\alpha'}(m_k - 1) = o(1)$$

$$\frac{k^{\alpha'}}{2(1+\delta)^2} [\sigma_k^2 + (m_k-1)^2] - \frac{2+\delta}{\delta^{1+\alpha'}} \frac{(\delta k)^{2+\alpha'}}{\varphi(k)} C_k^\varphi =$$

$$\frac{1}{2(1+\delta)^2} [k^{\alpha'} \sigma_k^2 + o(1)] - o(1) \geq \varepsilon > 0$$

für alle k hinreichend groß.

Somit ist Bedingung (2a) von Satz 5.2 erfüllt.

Korollar 5.5.

Es sei:

$$H_1 := \{k \in \mathbb{N}: m_k \leq 1\}$$

$$H_2 := \left\{ k \in \mathbb{N}: C_k^\varphi < \infty \text{ für eine Funktion } \varphi, \text{ die } (\varphi^*) \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0 \text{ erfüllt, } m_k, \sigma_k^2 \text{ und } C_k^\varphi \text{ erfüllen Un-} \right. \\ \left. \text{gleichung (2a)} \right\}$$

$$H_0 := \{k \in \mathbb{N}: k \notin H_i \text{ für } i=1,2\}$$

Falls H_0 endlich, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ rekurrent.

Beweis:

Da zum Beweis der Sätze 5.1 und 5.2 jeweils die gleiche Testfunktion $\phi_2(x) = \log(1+x)$ verwendet wurde, existiert ein $N_0 > 0$ sodaß

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi_2(k+i-1) - \phi_2(k)] \leq 0$$

für alle $k \geq N_0$, wenn H_0 endlich ist. $\square$

Anmerkung 5.6.

Korollar 5.5 erlaubt es, zum Nachweis der Rekurrenz für einen Prozeß verschiedene Kriterien zu verwenden. Insbesondere bedeutet dies, daß die komplizierten Bedingungen von Satz 5.2 oder Korollar 5.4 nur dann angewendet werden müssen, wenn die Bedingung " $m_k \leq 1$ " nicht erfüllt ist.

6. Ergodizität

Die zu den Ungleichungen (T*) und (R*) analoge Bedingung für Ergodizität ist nach Satz A0.6

$$k\lambda(k) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi(k+i-1) - \phi(k)] \leq -\varepsilon$$

für den Prozeß $\{Z(t)\}$, bzw.

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi(k+i-1) - \phi(k)] \leq -\varepsilon$$

für den Sprungprozeß $\{X_n\}$, jeweils für ein $\varepsilon > 0$ und alle k hinreichend groß. Durch die Voraussetzung $\varepsilon > 0$ sind diese beiden Ungleichungen nicht mehr beliebig umnormierbar und somit nicht mehr identisch wie bei den Untersuchungen bezüglich Transienz und Rekurrenz mit $\varepsilon = 0$, sodaß im folgenden zwischen Ergodizitätsbedingungen für $\{Z(t)\}$ und $\{X_n\}$ unterschieden werden muß. Die oben angegebenen Ungleichungen werden zur Entwicklung dieser Kriterien in der äquivalenten Form

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k\lambda(k) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi(k+i-1) - \phi(k)] < 0 \quad (E^*)$$

bzw.

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi(k+i-1) - \phi(k)] < 0 \quad (E^*S)$$

verwendet. Geeignete Testfunktionen sind ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 und ϕ_6 mit $n=1$ für (E*) bzw. ϕ_3, ϕ_4 und ϕ_6 mit $n=1,2$ für (E*S), wobei wiederum die obige Bedingung $\varepsilon > 0$ dafür verantwortlich ist, daß eine Testfunktion für die angestrebten Untersuchungen nicht mehr ausreicht.

Da die erwähnten Funktionen alle unbeschränkt wachsen, ist einerseits die Voraussetzung in Satz A0.6, daß die untersuchten Prozesse rekurrent sein müssen, trivialerweise erfüllt, wenn (E*) bzw. (E*S) gelten, andererseits muß aber, damit diese Funktionen überhaupt als Testfunktionen anwendbar sind,

$$E\phi(\xi_k) < \infty \quad (E^{**})$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gefordert werden. Diese Bedingung folgt bei ϕ_2, ϕ_3 und ϕ_6 mit $n=1$ schon aus $m_k < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$, stellt aber für ϕ_4 und ϕ_6 mit $n=2$ eine wesentliche Restriktion dar.

Vorbemerkung 6.0.

Der Sprungprozeß $\{X_n\}$ sei ergodisch und es gelte

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k\lambda(k) > 0.$$

Dann ist auch der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

Beweis:

Da $\{X_n\}$ ergodisch ist, existiert eine geeignete Testfunktion $\phi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$, die die Bedingung (E*S) erfüllt. Diese Funktion erfüllt wegen der Voraussetzung an $k\lambda(k)$ dann auch die Bedingung (E*). $\square$

Eine Umkehrung dieser Vorbemerkung zu formulieren ist nicht sinnvoll, weil dafür $\limsup_{k \rightarrow \infty} k\lambda(k) < \infty$ gefordert werden müßte, aber $k\lambda(k)$ im allgemeinen bei Populationen nicht beschränkt bleibt.

Satz 6.1.

Es sei

$$E \log(1 + \xi_k) < \infty \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) [m_k - 1] < 0 \tag{1}$$

so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

Beweis:

Testfunktion $\phi_2(t) = \log(1+t)$

Die Ungleichung (3.2a) von Satz 3.4 ist äquivalent zu

$$k\lambda(k) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i) - \log(k+1)] \leq \lambda(k) \frac{k}{k+1} [m_k - 1].$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) \frac{k}{k+1} [m_k - 1] = \limsup_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) [m_k - 1] < 0$$

ist die Bedingung des Satzes. $\square$

Satz 6.2.

Es sei

$$E\xi_k^\alpha < \infty \quad \text{für ein } \alpha \text{ mit } 0 < \alpha < 1 \text{ und alle } k \geq 1.$$

Falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^\alpha \lambda(k) [m_k - 1] < 0 \quad (2)$$

so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

Beweis:

Testfunktion $\phi_3(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$

Die Ungleichung (3.3a) von Satz 3.5 ist äquivalent zu

$$k\lambda(k) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^\alpha - k^\alpha] \leq \alpha k^\alpha \lambda(k) [m_k - 1].$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^\alpha \lambda(k) [m_k - 1] < 0$$

ist die Bedingung des Satzes. $\square$

Satz 6.3.

Es sei

$$E\xi_k < \infty \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k\lambda(k) [m_k - 1] < 0 \quad (3)$$

so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

Falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} [m_k - 1] < 0 \quad (3S)$$

so ist der Sprungprozeß $\{X_n\}$ ergodisch.

Beweis:

Testfunktion $\phi_B(t) = t$

Die beiden Bedingungen des Satzes sind direkte Folgerungen aus Gleichung (3.8a) von Korollar 3.9:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1) - k] = m_k - 1 \quad \square$$

Satz 6.4.

Es sei

$$E \xi_k^{1+\alpha} < \infty \quad \text{für ein } \alpha \text{ mit } 0 < \alpha < 1 \text{ und alle } k \geq 1,$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1+\alpha}/\varphi(t) = 0$ erfüllt.

Falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{1+\alpha} \lambda(k) [m_k - 1] < 0 \quad (4)$$

so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

Falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^\alpha [m_k - 1] < 0 \quad (4S)$$

so ist der Sprungprozeß $\{X_n\}$ ergodisch.

Beweis:

Testfunktion $\phi_A(t) = t^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$

Die Ungleichungen (4a), (4b) und (4c) von Satz 3.6 sind, wenn k hinreichend groß ist, äquivalent zu

$$\frac{1}{1+\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{1+\alpha} - k^{1+\alpha}] =$$

$$k^\alpha [m_k - 1 + o(k^{-\alpha})] = k^\alpha [m_k - 1] + o(1) =: D(k).$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k \lambda(k) D(k) = \limsup_{k \rightarrow \infty} k^{1+\alpha} \lambda(k) [m_k - 1] < 0$$

ist die Bedingung (4) des Satzes.

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} D(k) = \limsup_{k \rightarrow \infty} k^\alpha [m_k - 1] < 0$$

ist die Bedingung (45) des Satzes. $\square$

Satz 6.5.

Es sei

$$E\xi_k^2 < \infty \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k\lambda(k) [2k(m_k-1) + (m_k-1)^2 + \sigma_k^2] < 0 \quad (5)$$

so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

Falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} [2k(m_k-1) + (m_k-1)^2 + \sigma_k^2] < 0 \quad (5S)$$

so ist der Sprungprozeß $\{X_n\}$ ergodisch.

Beweis:

Testfunktion $\phi_\theta(t) = t^2$

Die beiden Bedingungen des Satzes sind direkte Folgerungen aus Gleichung (8b) von Korollar 3.9:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^2 - k^2] = 2k(m_k-1) + (m_k-1)^2 + \sigma_k^2 \quad \square$$

Korollar 6.6.

Es sei

$$E\xi_k^2 < \infty \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Falls für ein a mit $0 < a < \infty$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k[m_k - 1] = -a$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 < 2a$$

so ist der Sprungprozeß $\{X_n\}$ ergodisch.

Beweis:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} [2k(m_k - 1) + (m_k - 1)^2] = \limsup_{k \rightarrow \infty} [2k + m_k - 1](m_k - 1) =$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} 2k(m_k - 1) = -2a$$

Somit ist Bedingung (5S) von Satz 6.5 erfüllt. $\square$

Anmerkung 6.7.

- a) Ein Analogon zu den Korollaren 4.7 und 5.5 existiert nicht, da für die Erarbeitung der verschiedenen Ergodizitätsbedingungen auch verschiedene Testfunktionen verwendet werden mußten.
- b) Falls $\liminf_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) > 0$ und $\limsup_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) < \infty$ so kann in den Bedingungen (1) bis (5) der Faktor $\lambda(k)$ vernachlässigt werden.
- c) Korollar 6.6 ist das Analogon zu Korollar 4.6 und Korollar 5.4.a.

7. Geometrische Ergodizität

7.1. Der Prozeß $\{Z(t)\}$

Die zu den Ungleichungen (T*) und (R*) analoge Bedingung für geometrische Ergodizität des Prozesses $\{Z(t)\}$ ist nach Satz A0.7

$$k\lambda(k) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k)[\phi(k+i-1) - \phi(k)] \leq -\delta\phi(k) - \varepsilon$$

für ein $\delta > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ und alle k hinreichend groß. Geeignete Testfunktionen sind, abhängig vom Verhalten von $\lambda(k)$, ϕ_2 , ϕ_3 und als Grenzfall ϕ_6 mit $n=1$. Da diese Funktionen alle gegen unendlich streben, ist die obige Bedingung äquivalent zu

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k\lambda(k)}{\phi(k)} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k)[\phi(k+i-1) - \phi(k)] < 0 \quad (G^*)$$

Genau wie im Falle der Ergodizität ist die Voraussetzung, daß die untersuchten Prozesse rekurrent sein müssen, trivialerweise erfüllt. Es bleibt dann noch die Voraussetzung

$$E\phi(\xi_k) < \infty \quad (G^{**})$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, um dieses Kriterium überhaupt anwenden zu können. Diese Bedingung folgt aber, wie schon früher, aus $m_k < \infty$ für $k \in \mathbb{N}$.

Vorbemerkung 7.0.

Der Sprungprozeß $\{X_n\}$ sei ergodisch und es gelte für die Testfunktion ϕ , die (6.E*S) erfüllt,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k\lambda(k)}{\phi(k)} > 0.$$

Dann ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ geometrisch ergodisch.

Beweis:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k\lambda(k)}{\phi(k)} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k)[\phi(k+i-1) - \phi(k)] \leq$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k\lambda(k)}{\phi(k)} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k)[\phi(k+i-1) - \phi(k)]$$

Somit folgt (G*) unter der Voraussetzung an ϕ aus (6.E*S). $\square$

Satz 7.1.

Es sei

$$E \xi_k^\alpha < \infty \quad \text{für ein } \alpha \text{ mit } 0 < \alpha \leq 1 \text{ und alle } k \geq 1.$$

Falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) [m_k - 1] < 0 \quad (1)$$

so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ geometrisch ergodisch.

Beweis:

Testfunktion $\phi_3(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$

Nach Ungleichung (3.3a) von Satz 3.5 gilt:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \lambda(k)}{k^\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^\alpha - k^\alpha] \leq$$

$$\alpha \limsup_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) [m_k - 1]$$

Testfunktion $\phi_6(t) = t$

Nach Gleichung (3.6a) von Korollar 3.9 gilt:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \lambda(k)}{k} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1) - k] =$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) [m_k - 1] \quad \square$$

Satz 7.2.

Es sei

$$E \log(1 + \xi_k) < \infty \quad \text{für alle } k \geq 1,$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda(k)}{\log k} > 0.$$

Falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} m_k < 1 \quad (2)$$

so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ geometrisch ergodisch.

Beweis:

Testfunktion $\phi_2(t) = \log(1+t)$

Nach Ungleichung (3.2a) von Satz 3.4 gilt:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda(k)}{\log(1+k)} k \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i) - \log(k+1)] \leq$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda(k)}{\log(1+k)} \frac{k}{k+1} [m_k - 1] \leq$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda(k)}{\log k} \limsup_{k \rightarrow \infty} [m_k - 1] \quad \square$$

Anmerkung 7.3.

Die anderen, steiler ansteigenden Testfunktionen können keine besseren Resultate liefern, denn der Term $[m_k - 1]$ bleibt immer erhalten. Für die Anwendung dieser Funktionen werden aber noch Voraussetzungen über höhere Momente benötigt, sodaß die Resultate, die diese Funktionen liefern können, sogar schlechter sind. Da auch die sehr langsam ansteigende Funktion $\log(1+t)$ auf den gleichen Term führt bei entsprechend ansteigendem Zeitparameter, kann man vermuten, daß keine wesentlich besseren Resultate zu erwarten sind.

7.2. Der Prozeß $\{X_n\}$

Die zu den Ungleichungen (T*) und (R*) analoge Bedingung für geometrische Ergodizität des Sprungprozesses $\{X_n\}$ ist nach Satz A0.7

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi(k+i-1) - \phi(k)] \leq -\delta \phi(k) - \varepsilon$$

für ein $\delta > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ und alle k hinreichend groß. Diese Ungleichung ist aber mit Bedingungen an die Erwartungswerte m_k und eventuell noch an Momente von höherer Ordnung nicht erfüllbar, wie die folgende Überlegung zeigt: Den einzigen negativen Beitrag in der Taylorentwicklung der linken Seite liefert (siehe Kapitel 3)

$$\phi'(k) [m_k - 1 - A_1(k)] \geq -O(\phi'(k)).$$

Die Abschätzung über die Jensenungleichung der Sätze 3.4 und 3.5 und die direkte Berechnung des Satzes 3.8 führen zum gleichen Ergebnis (mit $A_1(k)=0$). Das bedeutet aber, daß die obige Unglei-

chung von keiner der untersuchten Testfunktionen sondern höchstens von

$$\phi_7(t) = e^{\beta t} \quad \text{für ein } \beta > 0$$

erfüllt werden kann. Die Verwendung dieser Funktion führt aber bei der Abschätzung über die Taylorentwicklung zu positiven Resttermen, siehe Satz 3.2, die schneller als $e^{\beta t}$ anwachsen. ϕ_7 ist deshalb nur für Spezialfälle geeignet, bei denen wesentlich mehr Information über die Nachkommensverteilungen vorliegt (siehe unten). Natürlich muß in diesen Fällen auch die jetzt sehr harte Bedingung (G**) erfüllt sein.

Spezialfall 7.4.

Es sei

$$p_0(k) + p_2(k) = 1 \quad \text{für alle } k \geq 1,$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} p_2(k) < \frac{1}{2}$$

Dann ist der Sprungprozeß geometrisch ergodisch.

Beweis:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\phi_7(k+i-1) - \phi_7(k)] =$$

$$e^{\beta k} \{ p_0(k) [e^{-\beta} - 1] + p_2(k) [e^{\beta} - 1] \} =$$

$$e^{\beta k} \{ -p_0(k)\beta + p_2(k)\beta + o(\beta) \} \leq -\delta \phi_7(k) - \varepsilon$$

für β , δ und ε positiv, aber hinreichend klein
und k hinreichend groß.

Da trivialerweise $E\phi_7(\xi_k) < \infty$ für alle $k \geq 1$, ist somit die Behauptung bewiesen. $\square$

8. Stationäre Maße

Voraussetzung für dieses Kapitel:

$\{Z(t)\}$ und somit auch $\{X_n\}$ seien rekurrent.

Unter dieser Voraussetzung existiert zu jedem Prozeß ein stationäres Maß. Das stationäre Maß von $\{Z(t)\}$ werde mit μ und das von $\{X_n\}$ mit $\tilde{\mu}$ bezeichnet. Diese Maße sind auf der Potenzmenge von N definiert und sie sind unter den Bedingungen (1.3'), (1.3''), (1.4') und (1.5') eindeutig bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstanten, und sie erfüllen die folgenden Gleichungssysteme (zur Vereinfachung der Schreibweise sei $\mu_j = \mu(\{j\})$).

$$j\lambda(j) \mu_j = \sum_{i=1}^{j+1} i\lambda(i) \mu_i p_{j-i+1}(i) \quad \text{für } j \in N \quad (1)$$

$$\tilde{\mu}_j = \sum_{i=1}^{j+1} \tilde{\mu}_i p_{j-i+1}(i) \quad \text{für } j \in N \quad (2)$$

Aus diesen beiden Gleichungssystemen folgt insbesondere

$$\mu_j = \tilde{\mu}_j = 0 \quad \text{für } j < N.$$

mit N aus den Voraussetzungen (1.3') bis (1.5'), und wegen der Eindeutigkeit

$$\tilde{\mu}_j = \gamma j\lambda(j) \mu_j \quad \text{für ein } \gamma > 0 \text{ und alle } j \in N.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise sei:

$$\mu_0 := \tilde{\mu}_0 := 0$$

$$g(s) := \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i s^i \quad \text{für } s \in \mathbb{C}$$

$$\tilde{g}(s) := \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mu}_i s^i \quad \text{für } s \in \mathbb{C}$$

$r(\tilde{r})$ sei der Radius des Konvergenzkreises von g ($\tilde{g}$) um den Nullpunkt, wobei möglicherweise der Fall $r=0$ ($\tilde{r}=0$) eintritt. Falls $\lambda(j)$ und $\frac{1}{\lambda(j)}$ nicht zu schnell anwachsen (höchstens polynomial), gilt $r = \tilde{r}$.

Bedingungen für $r \geq 1$ bzw. $\tilde{r} \geq 1$ sind implizit in Satz 8.2 des Abschnitts 8.2 enthalten.

8.1. Funktionalgleichung

Satz 8.1.

Falls $r > 0$, so erfüllt das stationäre Maß μ die folgende Funktionalgleichung für $s \in \mathbb{C}$, $|s| < \min(1, r)$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \lambda(j) \mu_j [s - f(s, j)] = 0$$

Falls $\tilde{r} > 0$, so erfüllt das stationäre Maß $\tilde{\mu}$ die folgende Funktionalgleichung für $s \in \mathbb{C}$, $|s| < \min(1, \tilde{r})$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}_j [s - f(s, j)] = 0$$

Beweis:

Zur Vereinfachung der Beweisführung sei

$$f(s, 0) := \sum_{i=0}^{\infty} p_i(0) s^i := 1.$$

Nach Gleichung (2) gilt für $j \geq 1$:

$$\tilde{\mu}_j = \sum_{i=1}^{j+1} \tilde{\mu}_i p_{j-i+1}(i)$$

Multiplikation mit s^{j+1} und Summation über alle j führt zu

$$\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\mu}_j s^{j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} \tilde{\mu}_i s^i p_{j-i+1}(i) s^{j-i+1}.$$

Die Substitution $k = j - i + 1$ mit anschließender Vertauschung der Summation ergibt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \tilde{\mu}_{j-k+1} s^{j-k+1} p_k(j-k+1) s^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \tilde{\mu}_{j-k+1} s^{j-k+1} p_k(j-k+1) s^k.$$

Die erneute Substitution $i = j - k + 1$ führt dann zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mu}_i s^i p_k(i) s^k = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mu}_i s^i \sum_{k=0}^{\infty} p_k(i) s^k =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mu}_i s^i f(s, i).$$

Zusammengefaßt ergibt dies

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mu}_i s^i [s - f(s, i)] = 0.$$

Nach Gleichung (1) gilt für $j \geq 1$:

$$j\lambda(j) \mu_j = \sum_{i=1}^{j+1} i\lambda(i) \mu_i p_{j-i+1}(i)$$

Der weitere Beweis verläuft völlig analog. $\square$

8.2. Existenz der Momente

Die weitere Untersuchung der stationären Maße bezüglich der Existenz von Momenten kann mit analogen Kriterien erfolgen, wie sie zur Erarbeitung der Bedingungen für Ergodizität bzw. geometrische Ergodizität verwendet wurden. Hinreichende Bedingungen dafür sind in Satz A0.10 zusammengestellt, der auf eine Arbeit von Tweedie (1983) zurückgeht. An Stelle der dortigen sehr allgemeinen Funktion ψ , vergleichbar mit der Funktion φ der " φ -Momente" C_k^φ , werden nur Potenzfunktionen mit beliebigem Exponenten untersucht, d.h. es werden Bedingungen angegeben dafür, daß

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i i^\nu < \infty \quad (M)$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}_i i^\nu < \infty \quad (MS)$$

für ein $\nu \in \mathbb{R}$, wobei nicht notwendig $\nu \geq 0$ sein muß. Die den Bedingungen (E*) bzw. (E*S) und (G*) analogen Ungleichungen für die Gültigkeit von (M) bzw. (MS) sind (Ungleichung (A0.7a) bzw. (A0.7b) umgeschrieben als "lim sup"-Bedingungen)

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{1-\nu} \lambda(k) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\Phi(k+i-1) - \Phi(k)] < \infty \quad (M^*)$$

bzw.

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{-\nu} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\Phi(k+i-1) - \Phi(k)] < \infty \quad (M^*S)$$

jeweils für eine geeignete Testfunktion Φ , die (Ungleichung (A0.5a) bzw. (A0.5b) umgeschrieben als "lim inf"-Bedingungen)

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k^{1-\nu} \lambda(k) \phi(k) > 0 \quad (M^*')$$

bzw.

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k^{-\nu} \phi(k) > 0 \quad (M^*S')$$

erfüllen muß. Die dafür in Frage kommenden (einfachen) Funktionen sind ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , ϕ_5 und ϕ_6 , d.h. also die Funktion $\log(1+t)$ und die Funktionenklasse t^α für $\alpha > 0$. Damit diese Funktionen überhaupt als Testfunktionen anwendbar sind, muß, genau wie in den Kapiteln 5, 6 und 7,

$$E\phi(\xi_k) < \infty \quad (M^{**})$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gefordert werden. Diese Bedingung folgt bei ϕ_2 , ϕ_3 und ϕ_6 mit $n=1$ schon aus $m_k < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$, stellt aber für ϕ_4 , ϕ_5 und ϕ_6 mit $n \geq 2$ eine wesentliche Restriktion dar.

Die Bedingung (M^*S') ist trivialerweise erfüllt, da mit Hilfe der Testfunktion ϕ_2 nur Aussagen über $\nu \leq 0$ gewonnen werden, und bei der Verwendung der anderen Testfunktionen deren Exponent immer größer als ν ist. Auch die Bedingung (M^*) stellt keine Einschränkung dar, da die Bedingungen an m_k in den späteren Sätzen immer in der Form

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^\beta \lambda(k) [m_k - 1] < 0$$

für ein geeignetes $\beta \geq 0$ auftreten, sodaß aus dieser Bedingung

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k^\beta \lambda(k) > 0$$

folgt. Aufgrund der Beziehungen zwischen β , ν und den verwendeten Testfunktionen tritt nach dem Ausmultiplizieren von $k^{1-\nu} \lambda(k) \phi(k)$ der Faktor $k^\beta \lambda(k)$ immer zusammen mit einer positiven, monoton wachsenden Funktion auf, sodaß (M^*) ebenfalls erfüllt ist.

Satz 8.2.

Es sei

$$E \log(1+\xi_k) < \infty \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Falls für ein $\beta \geq 0$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^\beta \lambda(k) [m_k - 1] < 0$$

so gilt (M) mit $\nu = -\beta$.

Falls für ein $\beta \geq 0$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^\beta [m_k - 1] < 0$$

so gilt (MS) mit $\nu = -(1+\beta)$.

Beweis:

Testfunktion $\phi_2(t) = \log(1+t)$

Nach Ungleichung (3.2a) von Satz 3.4 gilt:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{1+\beta} \lambda(k) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i-1) - \log(k+1)] \leq$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^\beta \lambda(k) \frac{k}{k+1} [m_k - 1] = \limsup_{k \rightarrow \infty} k^\beta \lambda(k) [m_k - 1]$$

Der Beweis für den zweiten Teil des Satzes ist völlig analog. $\square$

Satz 8.3.

Es sei

$$\mathbb{E} \xi_k^\alpha < \infty \quad \text{für ein } \alpha \text{ mit } 0 < \alpha \leq 1 \text{ und alle } k \geq 1.$$

Falls für ein $\beta \geq 0$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^\beta \lambda(k) [m_k - 1] < 0$$

so gilt (M) mit $\nu = \alpha - \beta$.

Falls für ein $\beta \geq 0$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^\beta [m_k - 1] < 0$$

so gilt (MS) mit $\nu = \alpha - \beta - 1$.

Beweis:

Testfunktion $\phi_3(t) = t^\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$ und als Grenzfall $\phi_6(t) = t$

Nach Ungleichung (3.3a) von Satz 3.5 bzw. Gleichung (3.6a) von Korollar 3.9 gilt für $0 < \alpha \leq 1$:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{1-\alpha+\beta} \lambda(k) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^\alpha - k^\alpha] \leq$$

$$\alpha \limsup_{k \rightarrow \infty} k^\beta \lambda(k) [m_k - 1]$$

Der Beweis für den zweiten Teil des Satzes ist völlig analog. $\square$

Satz 8.4.

Es sei

$$E_k^{(\alpha)} < \infty \quad \text{für ein } \alpha > 1 \text{ und alle } k \geq 1,$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^{(\alpha)} < \infty$$

Falls für ein $\beta \geq 0$ und $\alpha' := \min(1, \alpha - 1)$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{\beta - \alpha'} \lambda(k) = 0$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{\beta} \lambda(k) [m_k - 1] < 0$$

so gilt (M) mit $\nu = \alpha - \beta$.Falls für ein β mit $0 \leq \beta < \min(1, \alpha - 1)$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{\beta} [m_k - 1] < 0$$

so gilt (MS) mit $\nu = \alpha - \beta - 1$.Beweis:Testfunktion $\phi_4(t) = t^{\alpha}$ mit $1 < \alpha < 2$

Nach Ungleichung (3.4a) von Satz 3.8 gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{\alpha} - k^{\alpha}] \leq$$

$$\alpha k^{\alpha-1} [m_k - 1 + O(k^{1-\alpha}) C_k^{(\alpha)} + O(k^{-1})] =$$

$$\alpha k^{\alpha-1} [m_k - 1 + O(k^{1-\alpha})]$$

Testfunktion $\phi_8(t) = t^2$

Nach Gleichung (3.8b) von Korollar 3.9 gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^2 - k^2] = 2k[m_k - 1] + \sigma_k^2 + (m_k - 1)^2 =$$

$$2k[m_k - 1 + O(k^{-1}) C_k^{(2)}] = 2k[m_k - 1 + O(k^{-1})]$$

Testfunktion $\Phi_5(t) = t^\alpha$ mit $\alpha > 2$

Nach Ungleichung (3.5) von Satz 3.7 gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^\alpha - k^\alpha] \leq$$

$$\alpha k^{\alpha-1} [m_k - 1 + O(k^{-1}) C_k^{(2)} + O(k^{1-\alpha}) C_k^{(\alpha)}] =$$

$$\alpha k^{\alpha-1} [m_k - 1 + O(k^{-1})]$$

Damit erhält man für $\alpha > 1$:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{1+\beta-\alpha} \lambda(k) \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^\alpha - k^\alpha] \leq$$

$$\alpha \limsup_{k \rightarrow \infty} k^\beta \lambda(k) [m_k - 1 + O(k^{-\alpha'})] \leq$$

$$\alpha \limsup_{k \rightarrow \infty} k^\beta \lambda(k) [m_k - 1] + \limsup_{k \rightarrow \infty} k^{\beta-\alpha'} \lambda(k) O(1)$$

Der Beweis für den zweiten Teil des Satzes ist völlig analog. $\square$

Anmerkung 8.5.

a) Für $1 < \alpha < 2$ gelten die Aussagen des Satzes 8.4 auch unter den schwächeren Voraussetzungen

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{1+\beta-\alpha} \lambda(k) < \infty \quad \text{bzw.} \quad \beta = \alpha - 1$$

wenn an Stelle der Bedingung für $C_k^{(\alpha)}$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha / \varphi(t) = 0$ erfüllt, gefordert wird.

b) Für $\alpha \geq 2$ gelten die Aussagen des Satzes 8.4 auch unter den schwächeren Voraussetzungen

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{\beta-1} \lambda(k) < \infty \quad \text{bzw.} \quad \beta = 1$$

wenn in den Bedingungen für m_k der Term $[m_k - 1]$ durch

$$[m_k - 1 + \frac{1}{2k} \sigma_k^2] \quad \text{für } \alpha = 2 \quad \text{bzw.}$$

$$[m_k - 1 + \frac{1}{k} (\alpha-1) 2^{\alpha-2} \sigma_k^2] \quad \text{für } \alpha > 2$$

ersetzt wird. (Vergleiche die Korollare 4.8, 5.4.a und 6.6)

Korollar 8.6.

Es sei

$$\mathbb{E} \xi_k^\alpha < \infty \quad \text{für ein } \alpha > 1 \text{ und alle } k \geq 1,$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^{(\alpha)} < \infty$$

Falls für mit $\alpha' := \min(1, \alpha - 1)$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{-\alpha'} \lambda(k) = 0$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) [m_k - 1] < 0$$

so gilt (M) mit $\nu = \alpha$.

Falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} m_k < 1$$

so gilt (MS) mit $\nu = \alpha - 1$.

Beweis:

Setze in Satz 8.4 $\beta = 0$. $\square$

9. Vergleich der Kriterien

Zum Abschluß des ersten Teils dieser Arbeit enthält dieses Kapitel eine Zusammenstellung der in gewisser Weise interessantesten Kriterien und einen Vergleich mit der bekannten Klassifikation der nicht populationsabhängigen Verzweigungsprozesse in superkritische, kritische und subkritische Prozesse.

Ein Vergleich mit den Arbeiten über populationsabhängige Galton-Watson-Prozesses von Levy (1979), insbesondere Theorem 2.1, 2.2 und 2.3, bzw. Höpfner (1983), insbesondere Satz 4.1, zeigt, daß die dortigen Resultate weitgehend einzelnen Kriterien der Kapitel 4 und 5 entsprechen. Besonders hervorzuheben ist dabei Teil a) des Satzes 4.1 von Höpfner (1983), der im Gegensatz zu Korollar 4.6 mit Bedingungen an die zweiten Momente auskommt, und Teil b.ii) des gleichen Satzes, der einen durch Kapitel 5 nicht abgedeckten Fall behandelt.

Bei den Untersuchungen von $\{Z(t)\}$ bezüglich Transienz und Rekurrenz und bei der Betrachtung des Sprungprozesses $\{X_n\}$ spielt die Prozeßzeit von $\{Z(t)\}$ keine Rolle. In den Kriterien der Kapitel 6 bis 8, die sich auf $\{Z(t)\}$ beziehen, muß dagegen diese Zeit berücksichtigt werden, und deshalb gehen dort die Zeitparameter $\{\lambda(k)\}$ immer mit ein. Damit die folgenden Zusammenstellungen besser vergleichbar sind, gelte für das ganze Kapitel die Voraussetzung

$$0 < \inf_{k \in \mathbb{N}} \lambda(k) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda(k) < \infty.$$

Dadurch kann in allen Kriterien, die sich auf $\{Z(t)\}$ beziehen, der Faktor $\lambda(k)$ vernachlässigt werden.

9.1. Einfache Kriterien

"Einfach" soll bedeuten, daß in diesem Abschnitt eine Zusammenstellung der Kriterien mit Bedingungen an Momente der Nachkommensverteilungen von möglichst niedriger Ordnung zu finden ist. Der folgende Satz enthält diese Kriterien in einheitlicher Notation.

Satz 8.1.

Es gelte für ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$:

a) $m_k \geq 1 + \varepsilon$ für $k \geq N$,

$$\sup_{k \geq N} C_k^\varphi < \infty \quad \text{für ein } \varphi, \text{ das } (\varphi^*) \text{ erfüllt.}$$

Dann sind die Prozesse $\{Z(t)\}$ und $\{X_n\}$ transient.
(siehe Korollar 4.2.a)

b) $m_k \leq 1$ für $k \geq N$.

Dann sind die Prozesse $\{Z(t)\}$ und $\{X_n\}$ rekurrent.
(siehe Satz 5.1 und Anmerkung 5.3)

c) $E[\log(1+\xi_k)] < \infty$ für $1 \leq k \leq N$,

$$m_k \leq 1 - \varepsilon \quad \text{für } k \geq N.$$

Dann ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.
(siehe Satz 8.1)

d) $E[\xi_k^\alpha] < \infty$ für ein $\alpha > 0$ und $1 \leq k \leq N$,

$$m_k \leq 1 - \varepsilon \quad \text{für } k \geq N.$$

Dann ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ geometrisch ergodisch.
(siehe Satz 7.1)

e) $E[\xi_k] = m_k < \infty$ für $1 \leq k \leq N$,

$$m_k \leq 1 - \varepsilon \quad \text{für } k \geq N.$$

Dann ist der Sprungprozeß $\{X_n\}$ ergodisch.
(siehe Satz 6.3)

Die Symmetrie dieser Kriterien ist durch die zweite Bedingung von Satz 9.1.a gestört, da sie die einzige ist, in der ein Moment von höherer als erster Ordnung auftritt. Das folgende Beispiel zeigt aber, daß im allgemeinen Fall eine Erwartungswertbedingung allein nicht hinreichend für Transienz ist.

Beispiel 9.2.

Es sei $N \geq 2$ fest.

Die Sterberaten und Nachkommensverteilungen eines Prozesses $\{Z(t)\}$ seien folgendermaßen definiert:

$$\lambda(k) = 1 \quad \text{für alle } k \geq 1$$

$$f(s, k) \text{ beliebig} \quad \text{für } 1 \leq k < N$$

$$\text{mit } f(0, 1) = 0 \text{ und } 1 < m_k < \infty$$

$$f(s, k) := 1 - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} s^{k^3 - k} \quad \text{für } k \geq N$$

$$m_k = k - \frac{1}{k}$$

Satz 9.3.

Der durch Beispiel 9.2 definierte Prozeß $\{Z(t)\}$ ist ergodisch.

Beweis:

Aufgrund der Ausführungen zu Beginn von Kapitel 6 genügt es zu zeigen, daß

$$k \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\Phi_2(k+i-1) - \Phi_2(k)] \leq -\varepsilon < 0$$

für alle k hinreichend groß.

$$\Phi_2(x) = \log(1+x)$$

$$k \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i) - \log(k+1)] =$$

$$k \left[\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \log k + \frac{1}{k^2} \log(k^3) - \log(k+1) \right] =$$

$$k [\log k - \log(k+1)] + \frac{2}{k} \log k =$$

$$-k \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{2}{k} \log k = -1 + o(1) \leq -\frac{1}{2}$$

für alle k hinreichend groß. $\square$

Anmerkung 9.4.

Eine Voraussetzung der Form

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} m_k < \infty$$

ist somit nicht notwendig für Rekurrenz von $\{Z(t)\}$ oder $\{X_n\}$ bzw. für Ergodizität von $\{Z(t)\}$.

Das Analogon zu Satz 9.1 für die Existenz von Momenten der stationären Maße ist:

Satz 9.5.

Es sei für ein $N \in \mathbb{N}$, ein $\varepsilon > 0$ und ein $\alpha > 0$:

$$a) \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\xi_k^\alpha \right] < \infty$$

$$m_k \leq 1 - \varepsilon \quad \text{für } k \geq N$$

$$\text{Dann gilt } \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i i^\alpha < \infty.$$

$$b) \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\xi_k^{1+\alpha} \right] < \infty$$

$$m_k \leq 1 - \varepsilon \quad \text{für } k \geq N$$

$$\text{Dann gilt } \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}_i i^\alpha < \infty.$$

(siehe Satz 8.3 und Satz 8.6)

9.2. Grenzen der Kriterien

In diesem Abschnitt sind die Kriterien mit Bedingungen an das erste, zweite und teilweise noch an ein Moment von höherer Ordnung zusammengestellt. Diese Bedingungen stellen die Grenzfälle der mit den verwendeten Methoden erreichbaren Kriterien dar.

Satz 9.6.

Es gelte für ein a mit $0 < a < \infty$ und eine Funktion φ , die (φ^*) mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$ erfüllt.

$$a) \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} k[m_k - 1] = a$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 < 2a$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

Dann sind die Prozesse $\{Z(t)\}$ und $\{X_n\}$ transient.
(siehe Korollar 4.6)

$$b) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} k[m_k - 1] = a$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 > 2a$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} C_k^\varphi < \infty$$

Dann sind die Prozesse $\{Z(t)\}$ und $\{X_n\}$ rekurrent.
(siehe Korollar 5.4.a)

$$c) \quad \mathbb{E}[\xi_k^2] < \infty \quad \text{für alle } k \geq 1$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k[m_k - 1] = -a$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 < 2a$$

Dann ist der Sprungprozeß $\{X_n\}$ ergodisch.
(siehe Korollar 6.8)

$$d) \quad \mathbb{E}[\xi_k^2] < \infty \quad \text{für alle } k \geq 1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = 1$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k[2k[m_k - 1] + \sigma_k^2] < 0$$

Dann ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.
(siehe Satz 8.5)

Die Bedingungen von Satz 9.6.a und b ergeben, daß die "Grenze" zwischen Transienz und Rekurrenz bei

$$k[m_k - 1] = a > 0$$

$$\sigma_k^2 = 2a$$

liegt, wobei keine Aussage über diesen Grenzfall gemacht werden kann. Ein Prozeß mit dieser Parameterkonstellation muß mit anderen Methoden untersucht werden (siehe z.B. Satz 9.8). Eine ähnliche Abgrenzung zwischen 0-rekurrent und positiv rekurrent liefern die Kriterien nicht. Das folgende Beispiel zeigt aber, daß für den Sprungprozeß keine bessere Bedingung an Erwartungswert und Varianz der Nachkommensverteilung als die von Satz 9.6.c existieren kann. Diese Bedingung ist in gewisser Weise die symmetrische Ergänzung zu den beiden ersten Bedingungen des Satzes 9.6. Die letzte Bedingung dieses Satzes kann nur für diejenigen Folgen bzw. Teilfolgen bessere Ergebnisse als die Bedingungen von Teil c liefern, die die beiden Voraussetzungen

$$m_k \rightarrow 1-0$$

$$\sigma_k^2 \rightarrow 0$$

erfüllen.

Beispiel 9.7.

Es sei $-1 \leq b \leq +1$.

Die Sterberaten und Nachkommensverteilungen eines Prozesses $\{Z(t)\}$ seien folgendermaßen definiert:

$$\lambda(k) := 1 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

$$f(s, 1) := s^2$$

$$m_1 = 2, \quad \sigma_1^2 = 0$$

$$f(s, k) := \frac{1}{2} \left[1 - \frac{b}{k} \right] + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{b}{k} \right] s^2 \quad \text{für } k > 1$$

$$m_k = 1 + \frac{b}{k}, \quad \sigma_k^2 = 1 - \frac{b^2}{k^2}$$

Der Sprungprozeß $\{X_n\}$ zu diesem Beispiel ist ein spezieller Harris-Walk (siehe Freedman, 1971) und ist schon in der Originalarbeit von Harris (1952) angegeben. Satz 9.6 liefert für die Klassifikation das folgende Ergebnis:

$\{Z(t)\}$ und $\{X_n\}$ sind

transient falls $b > \frac{1}{2}$,
rekurrent falls $b < \frac{1}{2}$,
ergodisch falls $b < -\frac{1}{2}$.

Eine vollständige Klassifikation liefert der folgende Satz.

Satz 9.8.

Der durch Beispiel 9.7 definierte Prozeß $\{Z(t)\}$ ist

transient $\iff b > \frac{1}{2}$.
0-rekurrent $\iff 0 \leq b \leq \frac{1}{2}$.
ergodisch $\iff b < 0$.

Der durch Beispiel 9.7 definierte Sprungprozeß $\{X_n\}$ ist

transient $\iff b > \frac{1}{2}$.
0-rekurrent $\iff -\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{1}{2}$,
ergodisch $\iff b < -\frac{1}{2}$.

Beweis:

$$B_1 := B'_1 := B''_1 := 1$$

$$B_n := \prod_{k=2}^n \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{b}{k})}{\frac{1}{2}(1+\frac{b}{k})} = \prod_{k=2}^n \frac{k-b}{k+b} = \prod_{k=2}^n \left[1 - \frac{2b}{k+b} \right]$$

$$B'_n := \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{n} \right) B_n \right]^{-1}, \quad B''_n := \left[\frac{n}{2} \left(1 - \frac{b}{n} \right) B_n \right]^{-1}$$

jeweils für $n > 1$.

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} B_n, \quad S' := \sum_{n=1}^{\infty} B'_n, \quad S'' := \sum_{n=1}^{\infty} B''_n$$

Mit Hilfe dieser Größen gilt jetzt (siehe z.B Harris, 1952, oder Freedman, 1971):

$\{X_n\}$ transient $\iff S < \infty$
 $\{X_n\}$ 0-rekurrent $\iff S = \infty, S' = \infty$
 $\{X_n\}$ ergodisch $\iff S = \infty, S' < \infty$

Die entsprechende Aussage gilt für $\{Z(t)\}$, wenn S' durch S'' ersetzt wird.

a) Untersuchung von S

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = 1 - \frac{2b}{n+1+b} = 1 - \frac{2b}{n} + \frac{2b(1+b)}{n(n+1+b)}$$

Nach dem Gaußschen Kriterium für die Konvergenz von Summen (siehe z.B. Knopp, 1964, S.297) gilt:

$$S = \infty \iff 2b \leq 1$$

b) Untersuchung von S'

$$\begin{aligned} \frac{B'_{n+1}}{B'_n} &= \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{n}\right) B_n}{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{n+1}\right) B_{n+1}} = \frac{1 - \frac{b}{n}}{1 - \frac{b}{n+1}} \left[1 + \frac{2b}{n+1-b}\right] = \\ &= \left[1 - \frac{b}{n(n+1-b)}\right] \left[1 + \frac{2b}{n} + \frac{2b(b-1)}{n(n+1-b)}\right] = 1 + \frac{2b}{n} + O(n^{-2}) \end{aligned}$$

Analog zu oben gilt:

$$S' = \infty \iff -2b \leq 1$$

c) Untersuchung von S''

$$\begin{aligned} \frac{B''_{n+1}}{B''_n} &= \frac{\frac{n}{2} \left(1 - \frac{b}{n}\right) B_n}{\frac{n+1}{2} \left(1 - \frac{b}{n+1}\right) B_{n+1}} = \\ &= \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \left[1 - \frac{b}{n(n+1-b)}\right] \left[1 + \frac{2b}{n+1-b}\right] = \\ &= \left[1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}\right] \left[1 - \frac{b}{n(n+1-b)}\right] \left[1 + \frac{2b}{n} + \frac{2b(b-1)}{n(n+1-b)}\right] = \\ &= 1 - \frac{1-2b}{n} + O(n^{-2}) \end{aligned}$$

Analog zu oben gilt:

$$S'' = \infty \iff 1-2b \leq 1 \quad \square$$

9.3. Schlußbemerkung

Die beiden vorhergehenden Abschnitte haben gezeigt, daß eine einfache und vollständige Klassifikation wie bei den klassischen, d.h. nicht populationsabhängigen Verzweigungsprozessen mit den verwendeten Methoden nicht erreichbar ist und auch prinzipiell nicht erreichbar sein dürfte. Der Einteilung in superkritische, kritische und subkritische Prozesse entspricht am ehesten Satz 9.1, dort aber in der Form superkritisch (Teil a), nicht superkritisch (Teil b) und subkritisch (Teil c bis e). Auf den ersten Blick etwas überraschend dürfte dabei sein, daß einerseits in Teil a die Bedingung " $m_k \geq 1 + \varepsilon > 1$ für alle k hinreichend groß"

allein nicht hinreichend für Transienz (siehe auch Fujimagari 1976), und andererseits in Teil b bzw. c die Bedingung " $m_k < \infty$ gleichmäßig für alle k " nicht notwendig für Rekurrenz bzw. Ergodizität ist.

TEIL II

Der mehrdimensionale populationsabhängige

Markoffsche Verzweigungsprozeß

1. Definition des Prozesses

$\{Z(t): t \in \mathbb{R}_+\}$ sei ein d -dimensionaler populationsabhängiger Verzweigungsprozeß ($d > 1$) mit Zeitparametern $\{\lambda_i(x): 1 \leq i \leq d, x \in \mathbb{S}_1\}$ und Nachkommensverteilungen gegeben durch die Wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen $\{f^i(s, x): 1 \leq i \leq d, x \in \mathbb{S}_1\}$. Diese haben die Form

$$f^i(s, x) = \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) s^y, \quad s \in \mathbb{C}^d, |s_i| \leq 1$$

wobei $p_y^i(x)$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein Objekt vom Typ i bei seinem Tod durch $y \in \mathbb{S}$ Nachkommen ersetzt wird, wenn unmittelbar vor diesem Ereignis die Größe der Gesamtpopulation $x \in \mathbb{S}_1$ war. $\lambda_i(x)$ ist die aktuelle Sterberate eines Objektes vom Typ i bei einer Gesamtpopulation von x Objekten.

Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten dieses Prozesses werde mit $P(t) = [P_{xy}(t)]_{x, y \in \mathbb{S}}$ bezeichnet.

$$P_{00}(t) := 1 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_+$$

$$P_{0y}(t) := 0 \quad \text{für } y \in \mathbb{S}_1, t \in \mathbb{R}_+$$

$$P_{xy}(t) := \mathbb{P}[Z(t+s)=y | Z(s)=x] \quad \text{für } x \in \mathbb{S}_1, y \in \mathbb{S}, s, t \in \mathbb{R}_+$$

$$P_{xy}(h) = h \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) p_{y-x+e_i}^i(x) + o(h)$$

$$\text{für } x \in \mathbb{S}_1, y \in \mathbb{S}, y-x \in \mathbb{S}_*, x \neq y$$

$$P_{xx}(h) = 1 - h \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) [1 - p_{e_i}^i(x)] + o(h)$$

$$\text{für } x \in \mathbb{S}_1$$

$$P_{xy}(h) = o(h)$$

$$\text{für } x \in \mathbb{S}_1, y \in \mathbb{S}, y-x \notin \mathbb{S}_*$$

Der infinitesimale Generator der Kontraktionshalbgruppe $\{P(t): t \in \mathbb{R}_+\}$ werde mit $Q = \{q_{xy}\}_{x,y \in S}$ bezeichnet. Dessen Komponenten haben folgende Form:

$$q_{0y} = 0 \quad \text{für } y \in S$$

$$q_{xy} = \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) p_{y-x+e_i}^i(x) \quad \text{für } x \in S_1, y \in S, y-x \in S_*, x \neq y$$

$$q_{xx} = - \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) [1 - p_{e_i}^i(x)] \quad \text{für } x \in S_1$$

$$q_{xy} = 0 \quad \text{für } x \in S_1, y \in S, y-x \notin S_*$$

$$q_x := -q_{xx} \quad \text{für } x \in S$$

$\{X_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ sei der "Sprungprozeß" zu $\{Z(t)\}$ und $\{T_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ sei der Prozeß der "Sprungzeiten" von $\{Z(t)\}$, wobei auch die sogenannten Pseudosprünge berücksichtigt werden, bei denen ein Objekt stirbt und durch genau ein Objekt vom gleichen Typ ersetzt wird.

$$T_0 := 0$$

$$T_n := \text{Zeitpunkt der } n\text{-ten Geburt in der Population} \\ (= \infty, \text{ falls dieses Ereignis nie auftritt}).$$

Diese drei Prozesse sind folgendermaßen gekoppelt:

$$Z(t) = X_n \quad \text{für } T_n \leq t < T_{n+1}, n \in \mathbb{N}_0$$

Für $\{X_n\}$ und $\{T_n\}$ gilt folgende Rekursion, solange $X_n \in S_1$:

$$X_{n+1} = X_n + \Xi_{X_n}^{(n)}$$

$$T_{n+1} = T_n + \tau_{X_n}^{(n)}$$

Ξ_x ist die Änderung des Sprungprozesses vom Zustand $x \in S_1$ in den Zustand $x + \Xi_x$, die durch den Tod eines der $x = (x_1, \dots, x_d)$ Objekte und gleichzeitige Geburt seiner Nachkommen erfolgt. Stirbt ein Objekt vom Typ i , so gilt $\Xi_x = \xi_{ix} - e^i$, wobei ξ_{ix} die Anzahl der Nachkommen eines Objektes vom Typ i bei der Gesamtpopulation x ist. τ_x ist die Wartezeit bis zum Tod eines der x vorhandenen Objekte. Dabei sind $\{\xi_{ix}^{(n)}: 1 \leq i \leq d, x \in S_1, n \in \mathbb{N}\}$ und $\{\tau_x^{(n)}: x \in S_1, n \in \mathbb{N}\}$ unabhängige Zufallsvariable, jeweils identisch verteilt für festes $x \in S_1$, mit

$$P\{\xi_{ix}^{(n)} = y\} = p_y^i(x) \quad \text{für } 1 \leq i \leq d, y \in S,$$

$$P\{\bar{x}_x^{(n)} = \xi_{ix}^{(n)} - e^i\} = \frac{x_i \lambda_i(x)}{(x, \lambda(x))} \quad \text{für } 1 \leq i \leq d,$$

$$P\{\tau_x^{(n)} > t\} = \exp[-(x, \lambda(x))t] \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_+.$$

1.1. Bezeichnungen

$$m_{ij}(x) := \sum_{y \in S} p_y^i(x) y_j \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq d, x \in S_1$$

$$m_i(x) := [m_{i1}(x), \dots, m_{id}(x)] = E\{\xi_{ix}\}$$

für $1 \leq i \leq d, x \in S_1$

$$M(x) := [m_{ij}(x)]_{1 \leq i, j \leq d} \quad \text{für } x \in S_1$$

$$\Lambda(x) := \text{diag}[\lambda_1(x), \dots, \lambda_d(x)] \quad \text{für } x \in S_1$$

$$V(x) := [M^T(x) - I]\Lambda(x)x$$

$$\tilde{V}(x) := (x, \lambda(x))^{-1} [M^T(x) - I]\Lambda(x)x = E\{\bar{x}_x\}$$

$$C_{ix}^\varphi := E\varphi(\|\xi_{ix} - e^i\|) = \sum_{y \in S} p_y^i(x) \varphi(\|y - e^i\|)$$

für eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$D_x^\varphi := \frac{1}{\|x\|} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) C_{ix}^\varphi$$

$$\tilde{D}_x^\varphi := \sum_{i=1}^d \frac{x_i \lambda_i(x)}{(x, \lambda(x))} C_{ix}^\varphi$$

$$C_{ix}^{(\delta)} := E\|\xi_{ix} - e^i\|^\delta = \sum_{y \in S} p_y^i(x) \|y - e^i\|^\delta, \quad \delta > 0$$

$$D_x^{(\delta)} := \frac{1}{\|x\|} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) C_{ix}^{(\delta)}$$

$$\tilde{D}_x^{(\delta)} := \sum_{i=1}^d \frac{x_i \lambda_i(x)}{(x, \lambda(x))} C_{ix}^{(\delta)}$$

Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen sei:

$$p_y^i(x) := 0 \quad \text{für } y \in S_* - S, x \in S_1, 1 \leq i \leq d$$

1.2. Generelle Voraussetzungen

Die Prozesse $\{Z(t)\}$, $\{T_n\}$ und $\{X_n\}$ sind nur dann sinnvoll definiert, wenn zumindest

$$\sum_{y \in S} p_y^i(x) = 1 \quad \text{für } i \in \{j: x_j > 0\}, x \in S_1 \quad (1)$$

$$0 < (x, \lambda(x)) < \infty \quad \text{für } x \in S_1 \quad (2)$$

gelten. $\{X_n\}$ ist eine Markoffsche Kette mit diskreter Zeit und Zustandsraum S . $\{Z(t)\}$ ist eine Markoffsche Kette mit kontinuierlicher Zeit, die bis zum ersten Häufungspunkt der Sprungzeiten $\{T_n\}$ die gleichen Zustände wie $\{X_n\}$ annimmt, siehe hierzu das nächste Kapitel. Die Nachkommensverteilungen und Sterberaten für diejenigen i ($1 \leq i \leq d$) und $x \in S_1$, für die $x_i = 0$ ist, können offensichtlich beliebig gewählt werden, sodaß es keine Einschränkung bedeutet, wenn diese Kombinationen in den späteren Bedingungen nicht explizit berücksichtigt werden.

Eine Veränderung in $\{X_n\}$, dem Populationsvektor, erfolgt durch den Tod eines Objektes und gleichzeitige Geburt seiner Nachkommen, insbesondere kann der Populationsvektor dabei höchstens in einer positiven Komponente um eine Einheit kleiner werden. Die Bedingung

$$p_0^i(e^i) = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq d \quad (3)$$

führt somit auf einfache Weise zu einer reflektierten Variante der betrachteten Prozesse. Die zusätzliche Bedingung

$$p_0^i(x) > 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq d, x \in S_2 \quad (4)$$

garantiert, daß von jeder Populationsgröße $x \in S_2$ das ganze Rechteck $\{y \in S: y_i \leq x_i \text{ für } 1 \leq i \leq d\}$ mit Ausnahme des Nullpunktes in endlich vielen Sprüngen mit positiver Wahrscheinlichkeit erreichbar ist. Leider gibt es kein einfaches Analogon zur Bedingung (I.1.5) bzw. (I.1.5'), sondern man muß zusätzlich zu (4) z.B. noch

$$\text{"von jedem } x \in S_1 \text{ ist mit positiver Wahrscheinlichkeit auch } x+1 = (x_1+1, \dots, x_d+1) \text{ mit endlich vielen Sprüngen erreichbar"} \quad (5)$$

fordern, damit der Zustandsraum von $\{X_n\}$ ganz S und $\{X_n\}$ sowohl irreduzibel als auch aperiodisch ist. Ist eine der beiden Bedingungen (4) und (5) verletzt, so ist $\{X_n\}$ nicht mehr irreduzibel und der Zustandsraum kann in mehrere Klassen zerlegt werden. Neben den in Abschnitt I.1.2 untersuchten Fällen können bei mehrdimensionalen Prozessen auch mehrere bis abzählbar viele unendli-

che (Rekurrenz-) Klassen auftreten.

1.2.1. Beispiele

a) Für ein $x \in S_1$ gelte

$$p_{e_i}^i(x) = 1 \quad \text{für } 1 \leq i \leq d.$$

Der Zustand x ist absorbierend.

Für die weiteren Überlegungen sei dieser Fall ausgeschlossen.

b) Es sei

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{(i,0)}^1((n,0)) = 1 \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{(0,i)}^2((0,n)) = 1 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die beiden Mengen $\mathbb{N} \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{N}$ sind absorbierend, d.h. falls der Prozeß eine dieser Mengen erreicht, ist er nur noch eindimensional.

c) Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$p_{(1,1)}^1((n,k)) = 1 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

$$p_{(0,0)}^2((n,k)) = 1 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dies stellt die einfachste Form des Stammzellprozesses dar, wobei

Typ 1 = Stammzelle.

Typ 2 = nicht mehr reproduktionsfähige funktionelle Zelle.

Die Beispiele b) und c) können nur andeuten, welche qualitativ andere Verhaltensmuster die mehrdimensionalen Prozesse im Vergleich zu den eindimensionalen zeigen können. Insbesondere das letzte Beispiel gehört zu einer großen Klasse von Prozessen, die keine pathologischen Spezialfälle darstellen, sondern sowohl mathematisch als auch biologisch äußerst interessant sind, aber mit anderen Methoden als sie in dieser Arbeit verwendet werden, untersucht werden müssen.

Für alle weiteren Untersuchungen sollen jetzt folgende Voraussetzungen, eine Verallgemeinerung von (3), (4) und (5), für ein $N \geq 1$ gelten:

$$p_0^i(x) = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq d, x \in S_1, \|x\|_1 \leq N \quad (3')$$

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) [1 - p_e^i(x)] > 0 \quad \text{für } x \in S_1, \|x\|_1 < N \quad (3'')$$

"jedes $y \in S_N$ ist mit positiver Wahrscheinlichkeit von jedem anderen $x \in S_N$ mit endlich vielen Sprüngen erreichbar" (6)

N ist aufgrund der Bedingungen (3') und (6) eindeutig bestimmt.

1.3. Die Voraussetzung (ϕ^*) [siehe I.1.3]

1.4. Die Voraussetzungen (F^*), (F^*a) und (F^*b)

Die später verwendeten Testfunktionen sind von der Form

$$\phi(x) = \Psi(F(x)) .$$

Die Funktion Ψ dient überwiegend zur Anpassung an die Kriterien für Transienz, Rekurrenz und Ergodizität und wird analog zu den in Teil I verwendeten Testfunktionen gewählt. Die Funktion F dagegen dient zur Reduzierung der mehrdimensionalen Struktur auf eine skalare Größe. Voraussetzung (F^*) [(F^*a) bzw. (F^*b)] bedeutet dann (Notation siehe S. 8-10):

" F sei eine Funktion, die die folgenden Bedingungen 1 bis 6 [und 7a bzw. 7b] erfüllt."

1. $F : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $G_+ \subset G \subset \mathbb{R}^d$ und $S_* \subset G$.
2. Es existiert ein $\delta = \delta(F) > 0$, sodaß $G_\delta \subset G$.
3. F ist in $G_\delta - \{0\}$ zweimal stetig differenzierbar.
4. Es existiert ein $n > 0$, sodaß $F(tx) = t^n F(x)$ für $x \in G_\delta$ und $t \in \mathbb{R}_+$.
(n muß nicht ganzzahlig sein.)
5. $\inf_{x \in K_\delta} F(x) = 1$.
6. $\|\nabla F(x)\| \neq 0$ für alle $x \in K_\delta$.

7. Für alle $x \in K_\delta$ und $w \in K$ mit $(w, \nabla F(x)) = 0$ gilt

$$a) (w, \Delta F(x)w) \leq 0$$

$$b) (w, \Delta F(x)w) \geq 0.$$

(Für definite quadratische Formen unter Nebenbedingungen siehe z.B. Bellman, 1970, Chapter 5).

Zur Abkürzung der Schreibweise sei:

$$\gamma_0 := \sup_{x \in K_\delta} F(x)$$

$$\gamma_1 := \sup_{x \in K_\delta} \|\nabla F(x)\|$$

$$\gamma_2 := \sup_{x \in K_\delta} \|\Delta F(x)\|$$

Mit diesen Bezeichnungen gelten dann folgende Abschätzungen, jeweils für alle $x \in G_\delta - \{0\}$:

$$\|x\|^n \leq F(x) \leq \gamma_0 \|x\|^n$$

$$\|\nabla F(x)\| \leq \gamma_1 \|x\|^{n-1}$$

$$\|\Delta F(x)\| \leq \gamma_2 \|x\|^{n-2}$$

F läßt sich als Potentialfunktion interpretieren; die Bedingung 5 stellt eine Normierung zur Vereinfachung der Abschätzungen dar, die Bedingung 7a (7b) bedeutet, daß die Äquipotentialflächen in G_δ konvex (konkav) sind.

"Typische" Funktionen F sind $F(x) = Q^\alpha(x)$, $\alpha > 0$, wobei $Q(x)$ ein geeignetes homogenes Polynom in x vom Grade m ist ($n = \alpha m$).

1.4.1. Beispiele

a) $Q(x) = (w, x)$ für ein $w \in \mathbb{R}^d$ mit $w \gg 0$.

Die Äquipotentialflächen $\{x \in \mathbb{R}^d: Q(x) = \text{const} > 0\}$ sind die zu w orthogonalen Hyperebenen.

$$\delta^* := \inf\{\delta > 0: (w, x) = 0 \text{ für ein } x \in K_\delta\}$$

Da $\inf\{(w, x): x \in K_+\} > 0$ ist, gilt $\delta^* > 0$ und jedes δ mit $0 < \delta < \delta^*$ ist ein möglicher Wert für $\delta(F)$. Ist dieser Wert fixiert, muß noch w geeignet normiert werden, um die Bedingung 5 zu erfüllen. (Der Normierungsfaktor wird um so größer, je dichter $\delta(F)$ bei δ^* liegt.)

Q erfüllt dann (F^*a) und (F^*b) , und nach der Umnormierung gilt $w \gg 1$.

Ist andererseits $w \gg 1$ gegeben, so gilt $\inf\{(w,x): x \in K_+\} > 1$. Damit existiert ein eindeutig bestimmtes $\delta > 0$, sodaß $\inf\{(w,x): x \in K_\delta\} = 1$.

Mit $\delta(F) = \delta$ erfüllt dann Q die Bedingungen (F^*a) und (F^*b) .

b) $Q(x) = (x, Bx)$ für ein $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, symmetrisch.

$\beta_1, \dots, \beta_d$ seien die Eigenwerte von B und $w^1, \dots, w^d$ seien die zugehörigen Eigenvektoren mit $\|w^i\| = 1$.

b1) $\beta_1 > 0 > \beta_2 \geq \dots \geq \beta_d$, $w^1 = (w_1^1, \dots, w_d^1) > 0$.

$\beta_d > \frac{-a^2}{1-a^2} \beta_1$ wobei $a := \min\{w_i^1: 1 \leq i \leq d\} > 0$.

Die Äquipotentialflächen $\{x \in \mathbb{R}^d: Q(x) = \text{const} > 0\}$ stellen zweischalige elliptische Hyperboloide mit der Hauptachsenrichtung w^1 dar. Die Ungleichung zwischen β_1 und β_d garantiert, daß der Kegel $G_+ - \{0\}$ ganz im Inneren (bezüglich w^1) des Asymptotenkegels $\{x \in \mathbb{R}^d: Q(x) = 0\}$ liegt.

$$\delta^* := \inf\{\delta > 0: (x, Bx) = 0 \text{ für ein } x \in K_\delta\}$$

Da $\inf\{(Bx, x): x \in K_+\} > 0$ ist, gilt $\delta^* > 0$ und jedes δ mit $0 < \delta < \delta^*$ ist ein möglicher Wert für $\delta(F)$. Ist dieser Wert fixiert, muß noch B geeignet normiert werden, um die Bedingung 5 zu erfüllen.

Damit erfüllt Q dann die Bedingung (F^*a) .

b2) $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_d > 0$.

Q ist positiv definit und die Äquipotentialflächen sind Ellipsoide.

Z.B. mit $\delta = 2$ und $\beta_d = 1$ erfüllt Q die Bedingung (F^*b) .

2. Regularität

Eine Markoffsche Kette mit kontinuierlicher Zeit ist bis auf den Startwert bzw. die Startverteilung nur dann durch die Q-Matrix eindeutig bestimmt, wenn sich die Sprungzeiten im Endlichen fast sicher nicht häufen. Für die Populationsgröße bedeutet dies, daß sie in jedem endlichen Zeitintervall fast sicher endlich ist, der Prozeß explodiert also fast sicher nicht.

Die Sätze und Korollare dieses Kapitels sind die Analoga zu den entsprechenden Sätzen und Korollaren von Kapitel I.2. Da auch die Beweise bis auf den zu Satz 2.7 praktisch identisch sind, wenn man in den Versionen von Teil I den Ausdruck $X_n \lambda(X_n)$ durch das Skalarprodukt $[X_n, \lambda(X_n)]$ ersetzt, werden sie hier nicht mehr angegeben.

Definition 2.1.

$$\mathcal{E}_n := \mathcal{E}(X_0, \dots, X_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

sei die von $\{X_0, \dots, X_n\}$ erzeugte σ -Algebra.

Satz 2.2.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Regularität von $\{Z(t)\}$ ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [X_n, \lambda(X_n)]^{-1} = \infty \quad \text{f.s.}$$

Korollar 2.3.

Der Prozeß $\{Z(t)\}$ ist regulär, wenn

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n\|_1 < \infty \quad \text{f.s.}$$

Korollar 2.4.

Der Prozeß $\{Z(t)\}$ ist regulär, wenn $\{X_n\}$ transient ist und eine positive Funktion $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ existiert, sodaß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h(n)} = \infty \quad \text{und}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h(n)} \left\{ X_n, \lambda(X_n) \right\} < \infty \quad \text{f.s.}$$

Korollar 2.5.

Der Prozeß $\{Z(t)\}$ ist regulär, wenn $\{X_n\}$ transient ist,

$$\sup_{x \in S_1} \|\lambda(x)\|_{\infty} < \infty$$

und eine positive Funktion $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ existiert, sodaß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h(n)} = \infty \quad \text{und}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X_n\|_1}{h(n)} < \infty \quad \text{f.s.}$$

Anmerkung 2.6.

Die Bedingung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X_n\|_1}{h(n)} < \infty \quad \text{f.s.}$$

stellt eine Abschätzung des Wachstumsverhaltens der Gesamtpopulation von $\{X_n\}$ dar. Eine genauere Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $\{X_n\}$, $\{T_n\}$ und $\{Z(t)\}$ im allgemeinen Fall ist mir nicht bekannt. Analog zu den in Küster (1983) verwendeten Martingalmethoden läßt sich $(\|X_n\|_1)$ mit Hilfe eines asymptotischen Martingals nach oben abschätzen und so eine einfache Regularitätsbedingung finden.

Satz 2.7.

$\{X_n\}$ sei transient und es gelte

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|\lambda(x)\|_\infty < \infty$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|M(x)\| < \infty.$$

Dann ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ regulär.

Beweis:

Es gilt $\sup_{x \in S_1} \|\lambda(x)\|_\infty < \infty$. Damit ist Korollar 2.5 anwendbar.

Wegen $\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|M(x)\| < \infty$, aber nicht notwendig $M(x) < \infty$ für alle $x \in S_1$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $m^* = (m_1^*, \dots, m_d^*) \in \mathbb{R}_+^d$, sodaß

$$m_j^* = \sup_{x \in S_N} \max_{1 \leq i \leq d} m_{ij}(x) < \infty \quad \text{für } 1 \leq j \leq d$$

$$M^* := (1, m^*) - 1.$$

Da $\{X_n\}$ nach Voraussetzung transient ist, existiert ein $L > 0$, $L < \infty$ f.s., sodaß $\|X_n\|_1 \geq N$ für alle $n \geq L$, deshalb genügt es für die weiteren Untersuchungen, sich auf solche Prozesse zu beschränken, für die $\|X_n\|_1 \geq N$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Für $\{X_n\}$ gilt die Rekursion

$$X_{n+1} = X_n + \Xi_{X_n}.$$

Für den weiteren Beweis sei:

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &:= X_{n+1} - X_n - \tilde{V}(X_n) & \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \\ &= \Xi_{X_n} - \tilde{V}(X_n) \end{aligned}$$

$$\Sigma_{n+1} := \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

$$H(x) := (H_1(x), \dots, H_d(x))$$

$$H_j(x) := m_j^* - \frac{x_j \lambda_j(x)}{(x, \lambda(x))} \quad \text{für } 1 \leq j \leq d, x \in S_1$$

$$= (x, \lambda(x))^{-1} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) [m_j^* - \delta_{ij}]$$

$$\tilde{V}_j(x) = (x, \lambda(x))^{-1} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) [m_{ij}(x) - \delta_{ij}]$$

$$\eta_{n+1} := H(X_n) - \tilde{V}(X_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

Für diese Zufallsvariablen gilt:

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{E}_n] = 0$$

$$\mathbb{E}[\|\xi_{n+1}\|_1 | \mathcal{E}_n] = \mathbb{E}[\|\Xi_{X_n} - \tilde{V}(X_n)\|_1 | X_n]$$

$$\leq 2 \sup_{x \in \mathbb{S}_N} \|\tilde{V}(x)\|_1 \leq 2(M^* + 2)$$

$\{\Sigma_n\}$ ist ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{E}_n\}$.

$$0 \leq (1, \eta_n) \leq M^* + 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und damit

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1, \eta_i) \leq M^* + 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $\{X_n\}$ gilt jetzt:

$$X_{n+1} = X_n + \tilde{V}(X_n) + \xi_{n+1}$$

$$= X_n + H(X_n) + \xi_{n+1} - \eta_{n+1}$$

$$(1, X_{n+1}) = (1, X_n) + (1, H(X_n)) + (1, \xi_{n+1}) - (1, \eta_{n+1})$$

$$(1, H(X_n)) = M^*$$

Diese Rekursion wird mit der deterministischen Abschätzung

$$g(n+1) = g(n) + M^*, \quad g(0) = \|X_0\|_1$$

verglichen. Diese Differenzengleichung hat die Lösung

$$g(n) = \|X_0\|_1 + M^* n, \quad n \geq 0.$$

$$\|X_{n+1}\|_1 - g(n+1) = \|X_n\|_1 + (1, \xi_{n+1}) - (1, \eta_{n+1}) - g(n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} (1, \xi_i) - \sum_{i=1}^{n+1} (1, \eta_i)$$

Damit gilt dann:

$$\|X_n\|_1 = g(n) \left[1 + \frac{n}{g(n)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1, \xi_i) - \frac{n}{g(n)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1, \eta_i) \right]$$

Wähle $h(n) = g(n) \log n$!

$$\frac{\|X_n\|_1}{h(n)} = \frac{1}{\log n} + \frac{n}{g(n)} \frac{1}{n \log n} \sum_{i=1}^n (1, \xi_i) - \frac{n}{g(n)} \frac{1}{n \log n} \sum_{i=1}^n (1, \eta_i)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X_n\|_1}{h(n)} = \frac{1}{M^*} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(1, \Sigma_n)}{n \log n}$$

Der Satz ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß dieser Limes superior fast sicher endlich ist.

Es sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von endlichen Stopzeiten, sodaß $x_n \geq n$ und $\{x_n = i\} \in \mathcal{E}_i$. Für diese Folge gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{E} \left[\frac{1}{x_n \log x_n} \Sigma_{x_n} \right] \right\|_1 &= \left\| \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\frac{1}{x_n \log x_n} \Sigma_{x_n} \middle| x_n \right] \right] \right\|_1 \leq \\ &\mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\frac{2(M^*+2)}{\log x_n} \middle| x_n \right] \right] \leq \frac{2(M^*+2)}{\log n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Damit ist $\left\{ \frac{1}{n \log n} \Sigma_n \right\}$ ein L^1 -beschränktes asymptotisches Martingal (siehe Definition I.2.8) und es existiert nach Lemma I.2.9 eine Zufallsvariable Σ^* , sodaß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \log n} \Sigma_n = \Sigma^* \quad \text{f.s.}$$

Aus

$$\mathbb{E} \left\| \frac{1}{n \log n} \Sigma_n \right\|_1 \leq \frac{2(M^*+2)}{\log n} \rightarrow 0 \quad \text{folgt}$$

$$\mathbb{E} \|\Sigma^*\|_1 = 0 \quad \text{und somit}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X_n\|_1}{h(n)} = 0 \quad \text{f.s.}$$

Gilt zusätzlich noch

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq d} C_{ix}^{(1+\delta)} < \infty \quad \text{für ein } \delta > 0,$$

so konvergiert $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1, \xi_i)$ fast sicher gegen 0, siehe Theorem 2.18 in Hall and Heyde (1980), und man erhält sogar

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X_n\|_1}{g(n)} \leq 1 \quad \text{f.s. } \square$$

3. Allgemeine Abschätzungen

Da auch der Zustandsraum des mehrdimensionalen Prozesses abzählbar ist, können zur Untersuchung auf Transienz, Rekurrenz und Ergodizität die in Anhang 0 angegebenen Kriterien ebenfalls verwendet werden. Eine explizite Transformation des Zustandsraumes $\mathbb{S}$ in $\mathbb{N}_0$ ist aber nicht sinnvoll, da diese nicht mit der Struktur von $\mathbb{R}$ als linearer normierter Raum verträglich ist, in den $\mathbb{N}_0$ zur Durchführung der Abschätzungen analog zum eindimensionalen Fall eingebettet werden müßte. Unter Berücksichtigung der Addition in $\mathbb{Z}^d$ ($\supset \mathbb{S}_*$) haben die Kriterien folgende Gestalt:

$$\overline{\sum_{y \in \mathbb{S}}} q_{xy} \phi(y) = \overline{\sum_{\substack{x+y \in \mathbb{S} \\ y \in \mathbb{S}_*}}} q_{x, x+y} \phi(x+y) =$$

$$\overline{\sum_{x+y \in \mathbb{S}}} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) p_{y+e^i}^i(x) [\phi(x+y) - \phi(x)] =$$

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{\substack{x+y \in \mathbb{S} \\ y \in \mathbb{S}_*}}} p_{y+e^i}^i(x) [\phi(x+y) - \phi(x)] =$$

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathbb{S}}} p_y^i(x) [\phi(x+y-e^i) - \phi(x)]$$

$$\leq -\delta \phi(x) - \varepsilon$$

Diese Ungleichung mit

$\varepsilon = 0$, $\delta = 0$ für Rekurrenz bzw. Transienz

$\varepsilon > 0$, $\delta = 0$ für Ergodizität und

$\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ für geometrische Ergodizität

muß eine geeignete Testfunktion $\phi : \mathbb{S}_* \rightarrow \mathbb{R}_+$ für alle bis auf endlich viele $x \in \mathbb{S}$ erfüllen, siehe Bedingung (A0.2b) und Satz A0.4 bis Satz A0.7. Die Erweiterung des Definitionsbereiches für ϕ von $\mathbb{S}$ auf $\mathbb{S}_*$ muß wegen der Argumente $x+y-e^i$ erfolgen, die in der obigen Schreibweise nicht auf $\mathbb{S}$ beschränkt bleiben. Da aber $x+y-e^i \in \mathbb{S}_* - \mathbb{S}$ nur dann auftritt, wenn $x_i = 0$ ist, kann ϕ für diese Argumente weitgehend beliebig definiert werden, sofern nur die weiteren Bedingungen der Kriterien nicht verletzt werden.

Um auch beim mehrdimensionalen Prozeß die Beweise in den nächsten Kapiteln übersichtlicher zu gestalten, werden die Abschätzungen von

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [\phi(x+y-e^i) - \phi(x)] \quad (*)$$

zunächst wieder ohne direkte Bezugnahme auf die verschiedenen Kriterien durchgeführt. Genau wie in Teil I können die Abschätzungen auch zu Aussagen über den Sprungprozeß und die Momente der stationären Maße verwendet werden.

3.1. Auswahl der Testfunktionen

In Anlehnung an die Überlegungen in Teil I und die Arbeit von Kingman (1961) werden Testfunktionen der Form

$$\phi(x) = \Psi(F(x))$$

mit geeigneten Funktionen Ψ und F untersucht, wobei für Ψ folgende Funktionen verwendet werden:

$$\Psi_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{\log t} & \text{falls } t \geq 3 \\ \frac{1}{\log 3} & \text{falls } t \leq 3 \end{cases}$$

$$\Psi_2(t) = \begin{cases} \log t & \text{falls } t \geq 2 \\ \log 2 & \text{falls } t \leq 2 \end{cases}$$

$$\Psi_3(t) = t^\alpha, \quad \alpha > 0$$

Für F werden Potentialfunktionen verwendet, die die Bedingungen (F^*) bzw. (F^*a) oder (F^*b) erfüllen, siehe Abschnitt 1.4 in Kapitel 1. Das Definitionsgebiet G von F und damit auch von ϕ enthält ganz S_* . Darüber hinaus ist S_* mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Punkten in $G_\delta(F)$ enthalten, sodaß es genügt, die weiteren Betrachtungen auf dieses Gebiet zu beschränken.

Die Funktion $\phi_1(x) = \Psi_1(F(x))$ wird zum Nachweis der Transienz verwendet. $\Psi_1(t)$ ist gleichmäßig beschränkt und somit sind auch trivialerweise die Bedingungen (A0.1a) bzw. (A0.1b) erfüllt. Da andererseits $\phi_1(t)$ für $t > 3$ streng monoton gegen 0 strebt, folgt aus der Abschätzung für $F(x)$, daß es zu jeder endlichen Menge $U \subset S$ ein $y \in S - U$ gibt mit

$$\phi_1(y) < \min\{\phi_1(x) : x \in U\}.$$

Somit ist auch die Bedingung (A0.3) für jede endliche Teilmenge von S erfüllbar. Darüberhinaus garantiert die Ungleichung für $F(x)$ noch, daß die Fallunterscheidung bei der Definition von Ψ_1 und Ψ_2 vernachlässigt werden kann.

Die Funktionen $\Phi_j(x) = \Psi_j(F(x))$, $j=2,3$, werden zum Nachweis der Rekurrenz bzw. der Ergodizität verwendet. Da $\Psi_j(t)$ unbeschränkt wächst, ist mit der Ungleichung für $F(x)$ auch jeweils Bedingung (A0.4) erfüllt, sodaß bei den Untersuchungen auf Ergodizität bzw. geometrische Ergodizität die Rekurrenz der untersuchten Prozesse nicht getrennt nachgewiesen werden muß. Diese Testfunktionen erfordern aber Momentenbedingungen der Form

$$E\Phi_j(\xi_{ix}) < \infty \quad \text{für alle } x \in S_1, 1 \leq i \leq d,$$

um die Bedingungen (A0.1a) bzw. (A0.1b) zu erfüllen. Diese Momentenbedingungen wiederum sind äquivalent zu

$$E\Psi_j(\|\xi_{ix}\|^n) < \infty \quad \text{für alle } x \in S_1, 1 \leq i \leq d$$

oder

$$E \log[1 + \|\xi_{ix}\|] < \infty \quad \text{für } \Psi_2$$

$$E\|\xi_{ix}\|^{\alpha n} < \infty \quad \text{für } \Psi_3.$$

Für die Auswertung der Summe (*) gibt es, abhängig von der speziellen Form von Ψ und F , die folgenden drei Möglichkeiten:

Abschätzung der Taylorentwicklung

Abschätzung durch Jensen-Ungleichung

direkte Auswertung

Diese drei Methoden werden jetzt auf die dafür geeigneten Testfunktionen angewendet.

3.2. Abschätzung der Taylorentwicklung

Die oben angegebenen Testfunktionen sind für alle $x \in G_\delta$ mit $\|x\|$ hinreichend groß zweimal stetig differenzierbar. Durch Taylorentwicklung um $x \in S$ in einer geeigneten Umgebung $U_x \subset \mathbb{R}^d$ von x erhält man dann

$$\Phi(x+y-e^i) - \Phi(x) =$$

$$\Psi'(F(x)) \left[\nabla F(x), y-e^i \right] + \frac{1}{2} \Psi''(F(\theta^i)) \left[\nabla F(\theta^i), y-e^i \right]^2 \\ + \frac{1}{2} \Psi'(F(\theta^i)) \left[y-e^i, \Delta F(\theta^i)(y-e^i) \right]$$

wobei $\theta^i = x + \vartheta_i(y-e^i)$ für ein $\vartheta_i = \vartheta_i(x, y)$ mit $0 < \vartheta_i < 1$.

Für festes x ist dann θ^i eine Funktion von y .

Setzt man diese Entwicklung in die zu untersuchende Summe (*) ein, so erhält man:

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in S}} p_y^i(x) [\Phi(x+y-e^i) - \Phi(x)] = \\ \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \left[\Psi'(F(x)) \left[\nabla F(x), y-e^i \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Psi''(F(\theta^i)) \left[\nabla F(\theta^i), y-e^i \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Psi'(F(\theta^i)) \left[y-e^i, \Delta F(\theta^i)(y-e^i) \right] \right] \\ + \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \notin U_{ix}}} p_y^i(x) [\Phi(x+y-e^i) - \Phi(x)]$$

Wobei

$$U_{ix} := \{y \in S : \|y-e^i\| \leq \delta_u \|x\|\}$$

für eine geeignete Konstante $\delta_u > 0$, die so gewählt sein muß, daß für alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß und alle $y \in \mathbb{R}^d$ mit $\|y-e^i\| \leq \delta_u \|x\|$ gilt:

$$x+y-e^i \in G,$$

"F ist im Punkt $x+y-e^i$ zweimal stetig differenzierbar"

und

$$F(x+y-e^i) > \begin{cases} 1 & \text{für } \phi_1 \\ 0 & \text{für } \phi_2 \text{ und } \phi_3 \end{cases}.$$

Die Bedingung (F*) garantiert die Existenz einer solchen Konstanten, und $\varepsilon \mathcal{D}(F)$ für ein geeignetes ε mit $0 < \varepsilon \leq 1$ ist ein möglicher Wert.

Der lineare Term der Entwicklung läßt sich folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x) \Psi'(F(x)) [\nabla F(x), y - e^i] = \\ & \Psi'(F(x)) \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \left[\sum_{y \in S} p_y^i(x) [\nabla F(x), y - e^i] \right. \\ & \quad \left. - \sum_{y \notin U_{ix}} p_y^i(x) [\nabla F(x), y - e^i] \right] = \\ & \Psi'(F(x)) \left[\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) [\nabla F(x), m_{i.}(x) - e^i] \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \notin U_{ix}} p_y^i(x) [\nabla F(x), y - e^i] \right] = \\ & \Psi'(F(x)) [\nabla F(x), [M^T(x) - I] \Lambda(x)x] \\ & \quad - \Psi'(F(x)) \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \notin U_{ix}} p_y^i(x) [\nabla F(x), y - e^i] \end{aligned}$$

Zur Abkürzung der Schreibweise sei:

$$\begin{aligned} A_i^1(x) &:= \sum_{y \notin U_{ix}} p_y^i(x) [\nabla F(x), y - e^i] \\ A_i^2(x) &:= \sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x) \Psi''(F(\theta^1)) [\nabla F(\theta^1), y - e^i]^2 \\ A_i^3(x) &:= \sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x) \Psi'(F(\theta^1)) [y - e^1, \Delta F(\theta^1)(y - e^1)] \\ A_i^4(x) &:= \sum_{y \notin U_{ix}} p_y^i(x) [\Psi(F(x + y - e^1)) - \Psi(F(x))] \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [\Phi(x + y - e^i) - \Phi(x)] = \\ & \Psi'(F(x)) \left[[\nabla F(x), V(x)] - [A^1(x), \Lambda(x)x] \right] + \\ & \frac{1}{2} [A^2(x), \Lambda(x)x] + \frac{1}{2} [A^3(x), \Lambda(x)x] + [A^4(x), \Lambda(x)x] \end{aligned}$$

Die Hauptaufgabe besteht jetzt darin, die Skalarprodukte $\{A^i(x), \Lambda(x)x\}$, $i=1,2,3,4$, geeignet abzuschätzen. Das erste hängt nicht von Ψ ab, und für das zweite und dritte kann jeweils ein Abschätzungsschritt durchgeführt werden, ohne die spezielle Form von Ψ explizit zu verwenden.

Satz 3.1.

Unter den Voraussetzungen (F^*) , (φ^*) und $C_{ix}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ gilt:

$$\left| \{A^1(x), \Lambda(x)x\} \right| \leq \gamma_1 \frac{\delta_u \|x\|^{n+1}}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi$$

Beweis:

$$A_i^1(x) = \overline{\sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x) (\nabla F(x), y - e^i)}$$

$$|A_i^1(x)| \leq \|\nabla F(x)\| \overline{\sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x) \|y - e^i\|} \leq \gamma_1 \|x\|^{n-1} \frac{\delta_u \|x\|}{\varphi(\delta_u \|x\|)} C_{ix}^\varphi$$

(siehe Lemma A2.1)

$$\left| \{A^1(x), \Lambda(x)x\} \right| \leq \gamma_1 \frac{\delta_u \|x\|^n}{\varphi(\delta_u \|x\|)} \frac{d}{i=1} \times_i \lambda_i(x) C_{ix}^\varphi = \gamma_1 \frac{\delta_u \|x\|^{n+1}}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi$$

□

Satz 3.2.

Unter den Voraussetzungen (F^*) , (φ^*) und $C_{ix}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ gilt:

$$\left| \{A^2(x), \Lambda(x)x\} \right| \leq$$

$$\gamma_1^2 \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{y \in U_{ix}} |\Psi''(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{2n-2} \frac{\delta_u^2 \|x\|^3}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi$$

$$\text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^{2/\varphi(t)} = \infty.$$

$$\gamma_1^2 \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{y \in U_{ix}} |\Psi''(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{2n-2} \|x\| D_x^{(2)}$$

$$\text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^{2/\varphi(t)} < \infty.$$

Beweis:

$$A_i^2(x) = \overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \Psi''(F(\theta^i)) \left[\nabla F(\theta^i), y - e^i \right]^2$$

$$|A_i^2(x)| \leq \overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) |\Psi''(F(\theta^i))| \|\nabla F(\theta^i)\|^2 \|y - e^i\|^2 \leq$$

$$\delta_1^2 \overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \|y - e^i\|^2 |\Psi''(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{2n-2} \leq$$

$$\delta_1^2 \sup_{y \in U_{ix}} |\Psi''(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{2n-2} \overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \|y - e^i\|^2$$

Fallunterscheidung:

$$1. \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = \infty$$

$$\overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \|y - e^i\|^2 \leq \frac{\delta_u^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_u \|x\|)} C_{ix}^\varphi$$

(siehe Lemma A2.2)

$$\left| \left\{ A^2(x), \Lambda(x)x \right\} \right| \leq$$

$$\delta_1^2 \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{y \in U_{ix}} |\Psi''(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{2n-2} \frac{\delta_u^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_u \|x\|)} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) C_{ix}^\varphi$$

$$2. \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) < \infty$$

$$\overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \|y - e^i\|^2 \leq C_{ix}^{(2)}$$

(siehe Lemma A2.3)

$$\left| \left\{ A^2(x), \Lambda(x)x \right\} \right| \leq$$

$$\delta_1^2 \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{y \in U_{ix}} |\Psi''(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{2n-2} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) C_{ix}^{(2)} \quad \square$$

Satz 3.3.

Unter den Voraussetzungen (F*), (φ *) und $C_{ix}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ gilt:

$$\left| \left[A^3(x), \Lambda(x)x \right] \right| \leq$$

$$\gamma_2 \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{y \in U_{ix}} |\Psi'(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{n-2} \frac{\delta_u^2 \|x\|^3}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi$$

$$\text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty.$$

$$\gamma_2 \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{y \in U_{ix}} |\Psi'(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{n-2} \|x\| D_x^{(2)}$$

$$\text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) < \infty.$$

Beweis:

$$A_i^3(x) = \frac{\sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x)}{\sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x)} \Psi'(F(\theta^i)) \left[y - e^i, \Delta F(\theta^i)(y - e^i) \right]$$

$$|A_i^3(x)| \leq \frac{\sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x)}{\sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x)} |\Psi'(F(\theta^i))| \|\Delta F(\theta^i)\| \|y - e^i\|^2 \leq$$

$$\gamma_2 \frac{\sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x) \|y - e^i\|^2}{\sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x)} |\Psi'(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{n-2}$$

Die weitere Abschätzung erfolgt analog zum Beweis von Satz 3.2. $\square$

Definition 3.4.

$$\Gamma_1 := \frac{1}{2} \gamma_0 [\gamma_1^2 + \gamma_2]$$

$$\Gamma_2 := \frac{\gamma_1}{\delta_u} + \frac{\gamma_0}{\delta_u^2} [n \log(1 + \delta_u) + \log \gamma_0]$$

$$\Gamma_3 := \frac{\gamma_1}{\delta_u} + \gamma_0 \delta_u^{n-2} (1 + \delta_u)^n$$

Satz 3.5.

Unter den Voraussetzungen (F^*a) , (φ^*) und $C_{1x}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in \mathbb{S}$ mit $\|x\|$ hinreichend groß gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) > 0$, sodaß die Testfunktion $\phi_1(x) = \psi_1(F(x))$ für alle $x \in \mathbb{S}_N$ folgende Abschätzung erfüllt:

$$\frac{\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x)}{\sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x)} [\phi_1(x+y-e^i) - \phi_1(x)] \leq \frac{-\left[\nabla F(x), \nabla(x)\right] + \|x\|^n \left[\delta_u(\Gamma_1 + \varepsilon) + \gamma_1\right] \frac{\delta_u \|x\|}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi}{F(x) \log^2 F(x)} \quad (1a)$$

$$\text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty.$$

$$\frac{-\left[\nabla F(x), \nabla(x)\right] + \|x\|^{n-1} \left[\Gamma_1 + \varepsilon + \gamma_1/\delta_u\right] D_x^{(2)}}{F(x) \log^2 F(x)} \quad (1b)$$

$$\text{falls } \varphi(t) = t^2.$$

$$\frac{-\left[\nabla F(x), \nabla(x)\right] + \|x\|^{n-1} \left\{ (\Gamma_1 + \varepsilon) D_x^{(2)} + \frac{\gamma_1}{\delta_u} \frac{\delta_u^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi \right\}}{F(x) \log^2 F(x)} \quad (1c)$$

$$\text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0.$$

Beweis:

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\log t}, \quad \psi_1'(t) = \frac{-1}{t \log^2 t}, \quad \psi_1''(t) = \frac{2 + \log t}{t^2 \log^3 t}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x)}{\sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x)} \left[\frac{1}{\log F(x+y-e^i)} - \frac{1}{\log F(x)} \right] =$$

$$\frac{-1}{F(x) \log^2 F(x)} \left[\left[\nabla F(x), \nabla(x) \right] - \left[A^1(x), \Lambda(x)x \right] \right] + \frac{1}{2} \left[A^2(x), \Lambda(x)x \right] + \frac{1}{2} \left[A^3(x), \Lambda(x)x \right] + \left[A^4(x), \Lambda(x)x \right]$$

Die vier Skalarprodukte lassen sich jetzt wie folgt abschätzen:

$$\left| \left[A^1(x), \Lambda(x)x \right] \right| \leq \gamma_1 \frac{\delta_u \|x\|^{n+1}}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi$$

(siehe Satz 3.1)

Fallunterscheidung für $A^2(x)$ und $A^3(x)$:

$$a) \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = \infty$$

$$\left| \left[A^2(x), \Lambda(x)x \right] \right| \leq$$

$$\gamma_1^2 \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{y \in U_{ix}} |\Psi_1''(F(\Theta^i))| \|\Theta^i\|^{2n-2} \frac{\delta_U^2 \|x\|^3}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi \leq$$

$$\gamma_1^2 \frac{n \log(\|x\|-1) + \log \gamma_0 + 2}{n^3 (\|x\|-1)^2 \log^3(\|x\|-1)} \frac{\delta_U^2 \|x\|^3}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi =$$

$$\frac{\delta_U \gamma_1^2}{n^2} \left[1 + \frac{2 + \log \gamma_0}{n \log(\|x\|-1)} \right] \frac{\|x\|^2}{(\|x\|-1)^2 \log^2(\|x\|-1)} \frac{\delta_U \|x\|}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi$$

(siehe Satz 3.2 und Lemma A2.5)

$$\left| \left[A^3(x), \Lambda(x)x \right] \right| \leq$$

$$\gamma_2 \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{y \in U_{ix}} |\Psi_1'(F(\Theta^i))| \|\Theta^i\|^{n-2} \frac{\delta_U^2 \|x\|^3}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi \leq$$

$$\gamma_2 \frac{1}{n^2 (\|x\|-1)^2 \log^2(\|x\|-1)} \frac{\delta_U^2 \|x\|^3}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi =$$

$$\frac{\delta_U \gamma_2}{n^2} \frac{\|x\|^2}{(\|x\|-1)^2 \log^2(\|x\|-1)} \frac{\delta_U \|x\|}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi$$

(siehe Satz 3.3 und Lemma A2.6)

$$b) \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) < \infty$$

Analog zu oben gilt dann:

$$\left| \left[A^2(x), \Lambda(x)x \right] \right| \leq$$

$$\gamma_1^2 \left[1 + \frac{2 + \log \gamma_0}{n \log(\|x\|-1)} \right] \frac{\|x\|^2}{(\|x\|-1)^2 \log^2(\|x\|-1)} \frac{1}{\|x\|} D_x^{(2)}$$

$$\left| \left[A^3(x), \Lambda(x)x \right] \right| \leq$$

$$\gamma_2 \frac{\|x\|^2}{(\|x\|-1)^2 \log^2(\|x\|-1)} \frac{1}{\|x\|} D_x^{(2)}$$

$$\{A^4(x), \Lambda(x)x\} \leq 0$$

(siehe Lemma A2.7)

Die Addition der bisherigen Ergebnisse würde feinere, aber auch umfangreichere Abschätzungen als die in diesem Satz angegebenen liefern. Zur Vereinfachung werden deshalb die Skalarprodukte mit $A^2(x)$ und $A^3(x)$ weiter abgeschätzt.

$$\begin{aligned} & \left| \{A^2(x), \Lambda(x)x\} \right| + \left| \{A^3(x), \Lambda(x)x\} \right| \\ & \leq \begin{cases} \frac{\delta_u H(x)}{F(x) \log^2 F(x)} \frac{\delta_u \|x\|}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi & \text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty \\ \frac{H(x)}{F(x) \log^2 F(x)} \frac{1}{\|x\|} D_x^{(2)} & \text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$H(x) :=$$

$$\frac{1}{n} \left[\gamma_1^2 \left(1 + \frac{2 + \log \gamma_0}{n \log(\|x\| - 1)} \right) + \gamma_2 \right] \frac{\|x\|^2}{(\|x\| - 1)^2} \frac{F(x) \log^2 F(x)}{\log^2(\|x\| - 1)}$$

Wähle zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\varepsilon' > 0$ so, daß

$$[\gamma_1^2(1+\varepsilon') + \gamma_2](1+\varepsilon')^3 \leq \gamma_1^2 + \gamma_2 + \frac{4\varepsilon}{\gamma_0}$$

Zu diesem ε' existiert ein $N > 0$, sodaß für alle $x \in S_N$ gilt:

$$\frac{2 + \log \gamma_0}{n \log(\|x\| - 1)} \leq \varepsilon'$$

$$\frac{\|x\|^2}{(\|x\| - 1)^2} \leq 1 + \varepsilon'$$

$$\frac{\log^2 \|x\|}{\log^2(\|x\| - 1)} \leq 1 + \varepsilon'$$

$$\frac{\log^2(\gamma_0 \|x\|^n)}{\log^2 \|x\|} = \frac{[n \log \|x\| + \log \gamma_0]^2}{\log^2 \|x\|} \leq n^2(1+\varepsilon')$$

Damit gilt dann:

$$H(x) \leq$$

$$\frac{1}{n^2} [\gamma_1^2(1+\varepsilon') + \gamma_2](1+\varepsilon') \frac{\log^2 \|x\|}{\log^2(\|x\| - 1)} \frac{\log^2(\gamma_0 \|x\|^n)}{\log^2 \|x\|} \gamma_0 \|x\|^n \leq$$

$$\gamma_0 [\gamma_1^2(1+\varepsilon') + \gamma_2](1+\varepsilon')^3 \|x\|^n \leq$$

$$\gamma_0 [\gamma_1^2 + 2\gamma_2 + \frac{2\varepsilon}{\gamma_0}] \|x\|^n = 2(\Gamma_1 + \varepsilon) \|x\|^n$$

Direktes Einsetzen der Abschätzungen unter Berücksichtigung der drei Fälle

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \begin{cases} \infty \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

liefert dann die Aussage des Satzes. $\square$

Satz 3.6.

Unter den Voraussetzungen (F*), (φ^*) und $C_{ix}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in \mathbb{S}$ mit $\|x\|$ hinreichend groß gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) > 0$, sodaß die Testfunktion $\phi_2(x) = \Psi_2(F(x))$ für alle $x \in \mathbb{S}_N$ folgende Abschätzung erfüllt:

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\phi_2(x+y-e^i) - \phi_2(x)] \leq$$

$$\frac{|\nabla F(x), V(x)|}{F(x)} + \frac{\|x\|^n}{F(x)} \left[\frac{1}{2} \delta_u \gamma_0(\gamma_2 + \varepsilon) + \delta_u \Gamma_2 \right] \frac{\delta_u \|x\|}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi \quad (2a)$$

$$\text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty.$$

$$\frac{|\nabla F(x), V(x)|}{F(x)} + \frac{\|x\|^{n-1}}{F(x)} \left[\frac{1}{2} \gamma_0(\gamma_2 + \varepsilon) + \Gamma_2 \right] D_x^{(2)} \quad (2b)$$

$$\text{falls } \varphi(t) = t^2.$$

$$\frac{|\nabla F(x), V(x)|}{F(x)} + \frac{\|x\|^{n-1}}{F(x)} \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0(\gamma_2 + \varepsilon) D_x^{(2)} + \Gamma_2 \frac{\delta_u^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi \right\} \quad (2c)$$

$$\text{falls } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0.$$

Beweis:

$$\Psi_2(t) = \log t, \quad \Psi_2'(t) = \frac{1}{t}, \quad \Psi_2''(t) = -\frac{1}{t^2}$$

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\log F(x+y-e^i) - \log F(x)] =$$

$$\frac{1}{F(x)} \left[\left[\nabla F(x), \nabla(x) \right] - \left[A^1(x), \Lambda(x)x \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[A^2(x), \Lambda(x)x \right] + \frac{1}{2} \left[A^3(x), \Lambda(x)x \right] + \left[A^4(x), \Lambda(x)x \right] \right]$$

Die vier Skalarprodukte lassen sich jetzt wie folgt abschätzen:

$$\left| \left[A^1(x), \Lambda(x)x \right] \right| \leq \gamma_1 \frac{\delta_u \|x\|^{n+1}}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi$$

(siehe Satz 3.1)

$$\left[A^2(x), \Lambda(x)x \right] = \\ - \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \frac{\sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x)}{\sum_{y \in U_{ix}} p_y^i(x)} \frac{\left[\nabla F(\theta^i), y - e^i \right]^2}{F^2(\theta^i)} \leq 0$$

(Dieser Ausdruck wird vernachlässigt.)

Fallunterscheidung für $A^3(x)$:

$$a) \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = \infty$$

$$\left| \left[A^3(x), \Lambda(x)x \right] \right| \leq$$

$$\gamma_2 \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{y \in U_{ix}} |\Psi'_2(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{n-2} \frac{\delta_u^2 \|x\|^3}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi \leq$$

$$\gamma_2 \frac{1}{(\|x\|-1)^2} \frac{\delta_u^2 \|x\|^3}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi = \delta_u \gamma_2 \frac{\|x\|^2}{(\|x\|-1)^2} \frac{\delta_u \|x\|}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi$$

(siehe Satz 3.3 und Lemma A2.8)

$$b) \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) < \infty$$

Analog zu oben gilt dann:

$$\left| \left[A^3(x), \Lambda(x)x \right] \right| \leq \gamma_2 \frac{\|x\|^2}{(\|x\|-1)^2} \frac{1}{\|x\|} D_x^{(2)}$$

$$\left| \left[A^4(x), \Lambda(x)x \right] \right| \leq \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \frac{n \log(1+\delta_u) + \log \gamma_0}{\varphi(\delta_u \|x\|)} C_{ix}^\varphi =$$

$$\frac{1}{\delta_u} \left[n \log(1+\delta_u) + \log \gamma_0 \right] \frac{\delta_u \|x\|}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi$$

(siehe Lemma A2.9)

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N > 0$, sodaß für alle $x \in S_N$ gilt:

$$\frac{\|x\|^2}{(\|x\|-1)^2} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\delta_2}$$

Die Addition der Abschätzungen unter Berücksichtigung der drei Fälle

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \begin{cases} \infty \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

liefert dann die Aussage des Satzes. $\square$

Anmerkung 3.7.

a) Der Homogenitätsgrad n der Potentialfunktion F ist bei den beiden Testfunktionen $\phi_1(x) = \Psi_1(F(x))$ und $\phi_2(x) = \Psi_2(F(x))$ ohne Bedeutung, da durch die Logarithmierung in den Funktionen Ψ_1 und Ψ_2 dieser Exponent zu einem multiplikativen Faktor wird. $n > 0$ ist die einzige Bedingung, die für die beiden Testfunktionen gebraucht wird, damit ϕ_1 gegen 0 und ϕ_2 gegen ∞ konvergieren (für $\|x\| \rightarrow \infty$).

b) Für die Potentialfunktion $F(x) = (w, x)$ für ein $w \in \mathbb{R}^d$, $w \gg 1$ (siehe Abschnitt 1.4.1), gilt:

$$\nabla F(x) = w, \quad \Delta F(x) = 0$$

$$\gamma_0 = \|w\|, \quad \gamma_1 = \|w\|, \quad \gamma_2 = 0$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \|w\|^3$$

$$\Gamma_2 = \frac{\|w\|}{\delta_u^2} [\delta_u + n \log(1+\delta_u) + \log\|w\|]$$

Es kann $\delta_u = \delta(F) (< 1)$ gewählt werden.

c) Für die Potentialfunktion $F(x) = (x, Bx)$ für eine geeignete symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ (siehe Abschnitt 1.4.1) gilt:

$$\nabla F(x) = 2Bx, \quad \Delta F(x) = 2B$$

$$\gamma_0 = \|B\|, \quad \gamma_1 = 2\|B\|, \quad \gamma_2 = 2\|B\|$$

$$\Gamma_1 = (1+2\|B\|)\|B\|^2$$

$$\Gamma_2 = \frac{\|B\|}{\delta_u^2} [2\delta_u + n \log(1+\delta_u) + \log\|B\|]$$

c1) Falls die Potentialfunktion $(F*a)$ erfüllt, kann $\delta_u = \delta(F)$ (< 1) gewählt werden.

c2) Falls die Potentialfunktion (F^*b) erfüllt, muß $\delta_U \leq \min(\delta(F), 1-\varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ gewählt werden (damit $F(x+y-e^i) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ mit $\|y-e^i\| \leq \delta_U \|x\|$). Falls kein Eigenvektor zum größten Eigenwert in K_{δ_U} liegt, gelten die Angaben für die Konstanten nur mit " $\leq$ ".

Satz 3.8.

Unter den Voraussetzungen (F^*) , (φ^*) für eine Funktion φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n / \varphi(t) = 0$ und $C_{ix}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) > 0$, sodaß die Testfunktion $\Phi_3(x) = F(x)$ für alle $x \in S_N$ folgende Abschätzung erfüllt:

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in S} p_y^i(x) [\Phi_3(x+y-e^i) - \Phi_3(x)]} \leq$$

$$\left[\nabla F(x), \nabla(x) \right] + \|x\|^n \left[\frac{1}{2} \delta_U (\gamma_2 + \varepsilon) + \delta_U \Gamma_3 \right] \frac{\delta_U^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi \quad (3a)$$

falls $0 < n < 2$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = \infty$.

$$\left[\nabla F(x), \nabla(x) \right] + \|x\|^{n-1} \left[\frac{1}{2} (\gamma_2 + \varepsilon) + \Gamma_3 \right] D_x^{(2)} \quad (3b)$$

falls $0 < n < 2$ und $\varphi(t) = t^2$.

$$\left[\nabla F(x), \nabla(x) \right] + \|x\|^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_2 + \varepsilon) D_x^{(2)} + \Gamma_3 \frac{\delta_U^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi \right\} \quad (3c)$$

falls $0 < n < 2$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = 0$.

$$\left[\nabla F(x), \nabla(x) \right] + \|x\| \left\{ \frac{1}{2} \gamma_2 D_x^{(2)} + \Gamma_3 \frac{\delta_U^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi \right\} \quad (3d)$$

falls $n = 2$.

$$\left[\nabla F(x), \nabla(x) \right] + \|x\|^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} \gamma_2 (1 + \delta_U)^{n-2} D_x^{(2)} \right. \quad (3e)$$

$$\left. + \Gamma_3 \frac{\delta_U^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi \right\}$$

falls $n > 2$.

Beweis:

$$\Psi_3(t) = t, \quad \Psi'_3(t) = 1, \quad \Psi''_3(t) = 0$$

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [F(x+y-e^i) - F(x)]} =$$

$$[\nabla F(x), v(x)] - [A^1(x), \Lambda(x)x]$$

$$+ \frac{1}{2} [A^2(x), \Lambda(x)x] + \frac{1}{2} [A^3(x), \Lambda(x)x] + [A^4(x), \Lambda(x)x]$$

Die vier Skalarprodukte lassen sich jetzt wie folgt abschätzen:

$$|[A^1(x), \Lambda(x)x]| \leq \gamma_1 \frac{\delta_U \|x\|^{n+1}}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi$$

(siehe Satz 3.1)

$$[A^2(x), \Lambda(x)x] = 0$$

Fallunterscheidung für $A^3(x)$:

$$a) \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty$$

$$|[A^3(x), \Lambda(x)x]| \leq$$

$$\gamma_2 \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{y \in U_{ix}} |\Psi'_3(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{n-2} \frac{\delta_U^2 \|x\|^3}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi =$$

$$\gamma_2 \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\|^{n-2} \frac{\delta_U^2 \|x\|^3}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi$$

$$b) \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) < \infty$$

$$|[A^3(x), \Lambda(x)x]| \leq \gamma_2 \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\|^{n-2} \|x\| D_x^{(2)}$$

(siehe Satz 3.3)

$$\sup_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\|^{n-2} \leq \begin{cases} (\|x\|-1)^{n-2} & \text{falls } 0 < n < 2 \\ 1 & \text{falls } n = 2 \\ (1+\delta_U)^{n-2} \|x\|^{n-2} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

(siehe Lemma A2.4)

$$\left| \left[A^4(x) \cdot \Lambda(x)x \right] \right| \leq \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \gamma_0 (1+\delta_U)^n \frac{\delta_U^n \|x\|^n}{\varphi(\delta_U \|x\|)} C_{1x}^\varphi =$$

$$\gamma_0 (1+\delta_U)^n \frac{\delta_U^n \|x\|^{n+1}}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi$$

(siehe Lemma A2.10)

Die weitere Abschätzung für $0 < n < 2$ erfolgt analog zum Beweis von Satz 3.6. für $n \geq 2$ ist nur die Definition von Γ_3 in die bisherigen Abschätzungen einzusetzen.

Die Kombination der Abschätzungen unter Berücksichtigung der 3×3 Fälle

$$n - 2 \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = \begin{cases} \infty \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

mit der Nebenbedingung $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n / \varphi(t) = 0$ liefert dann die Aussage des Satzes. $\square$

Anmerkung 3.9.

Die Testfunktion $\Phi_3 = \Psi_3(F(x))$ mit $\Psi_3(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, ist wiederum eine homogene Funktion vom Grad αn , die (F^*) bzw (F^*b) erfüllt, falls F selbst eine homogene Funktion vom Grad n ist und (F^*) bzw. (F^*b) erfüllt. Für die Abschätzung der Summe $(*)$ über die Taylorentwicklung kann deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Psi_3(t) = t$ gewählt werden.

Korollar 3.10.

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.8 gelten die dortigen Aussagen auch für die Testfunktion $\Phi_3(x) = (w, x)^\alpha$ mit $\alpha > 1$ und $w \gg 1$, wobei die dort auftretenden Größen folgende Werte annehmen:

$$\nabla F(x) = \alpha (w, x)^{\alpha-1} w$$

$$\gamma_0 = \|w\|^\alpha, \quad \gamma_1 = \alpha \|w\|^\alpha$$

$$\gamma_2 = \alpha(\alpha-1) \|w\|^{\alpha'} \quad \text{mit } \alpha' := \max(2, \alpha)$$

$$\Gamma_3 = \|w\|^\alpha \left[\frac{\alpha}{\delta_U} + \delta_U^{\alpha-2} (1+\delta_U)^\alpha \right]$$

Beweis:

$$\phi_3(x) = \Psi_3(F(x)) \quad , \quad \Psi_3(t) = t \quad , \quad F(x) = (w, x)^\alpha$$

$$1 \leq (w, x) \leq \|w\| \quad \text{für } x \in K_{\delta_U}$$

Die Grenzen werden jeweils angenommen !

$$\gamma_0 = \|w\|^\alpha$$

$$\nabla F(x) = \alpha(w, x)^{\alpha-1} w$$

$$\|\nabla F(x)\| = \alpha(w, x)^{\alpha-1} \|w\| \leq \alpha \|w\|^\alpha \|x\|^{\alpha-1}$$

$$\gamma_1 = \alpha \|w\|^\alpha$$

$$\Delta F(x) = \alpha(\alpha-1)(w, x)^{\alpha-2} w \cdot w$$

$$\|\Delta F(x)\| = \alpha(\alpha-1)(w, x)^{\alpha-2} \|w\|^2$$

$$\leq \begin{cases} \alpha(\alpha-1) \|w\|^2 \|x\|^{\alpha-2} & \text{falls } \alpha < 2 \\ \alpha(\alpha-1) \|w\|^2 & \text{falls } \alpha = 2 \\ \alpha(\alpha-1) \|w\|^2 \|w\|^{\alpha-2} \|x\|^{\alpha-2} & \text{falls } \alpha > 2 \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \alpha(\alpha-1) \|w\|^{\alpha'}$$

$$\Gamma_3 = \frac{\gamma_1}{\delta_U} + \gamma_0 \delta_U^{n-2} (1 + \delta_U)^n \quad \square$$

Korollar 3.11.

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.8 gelten die dortigen Aussagen auch für die Testfunktion $\phi_3(x) = (x, Bx)^\alpha$ mit $\alpha > 1$ und B positiv definit geeignet normiert, wobei die dort auftretenden Größen folgende Werte annehmen bzw. durch folgende Werte abgeschätzt werden können:

$$\nabla F(x) = 2\alpha(x, Bx)^{\alpha-1} Bx$$

$$\gamma_0 \leq \|B\|^\alpha \quad , \quad \gamma_1 \leq 2\alpha \|B\|^\alpha$$

$$\gamma_2 \leq 2\alpha [2(\alpha-1) \|B\|^{\alpha'} + \|B\|^\alpha] \quad \text{mit } \alpha' := \max(2, \alpha)$$

$$\Gamma_3 \leq \|B\|^\alpha \left[\frac{2\alpha}{\delta_U} + \delta_U^{2\alpha-2} (1 + \delta_U)^{2\alpha} \right]$$

Beweis:

$$\phi_3(x) = \psi_3(F(x)) \quad , \quad \psi_3(t) = t \quad , \quad F(x) = (x, Bx)^\alpha$$

$$1 \leq (x, Bx) \leq \|B\| \quad \text{für } x \in K_{\delta_U}$$

Die untere Grenze wird immer angenommen, die obere nur dann, wenn ein Eigenvektor zum größten Eigenwert in K_{δ_U} liegt !

$$\gamma_0 \leq \|B\|^\alpha$$

$$\nabla F(x) = 2\alpha(x, Bx)^{\alpha-1} Bx$$

$$\|\nabla F(x)\| = 2\alpha(x, Bx)^{\alpha-1} \|Bx\| \leq 2\alpha \|B\|^\alpha \|x\|^{2\alpha-1}$$

$$\gamma_1 \leq 2\alpha \|B\|^\alpha$$

$$\Delta F(x) = \nabla \bullet \nabla F(x) = \nabla \bullet [2\alpha(x, Bx)^{\alpha-1} Bx] =$$

$$4\alpha(\alpha-1)(x, Bx)^{\alpha-2} (Bx) \bullet (Bx) + 2\alpha(x, Bx)^{\alpha-1} B$$

$$\|\Delta F(x)\| \leq 4\alpha(\alpha-1)(x, Bx)^{\alpha-2} \|Bx\|^2 + 2\alpha(x, Bx)^{\alpha-1} \|B\|$$

$$\leq \begin{cases} [4\alpha(\alpha-1) \|B\|^2 + 2\alpha\|B\|^\alpha] \|x\|^{\alpha-2} & \text{falls } \alpha < 2 \\ [4\alpha(\alpha-1) \|B\|^2 + 2\alpha\|B\|^2] \|x\|^2 & \text{falls } \alpha = 2 \\ [4\alpha(\alpha-1) \|B\|^\alpha + 2\alpha\|B\|^\alpha] \|x\|^{\alpha-2} & \text{falls } \alpha > 2 \end{cases}$$

$$\gamma_2 \leq 2\alpha [2(\alpha-1)\|B\|^{\alpha'} + \|B\|^\alpha]$$

$$\Gamma_3 = \frac{\gamma_1}{\delta_U} + \gamma_0 \delta_U^{n-2} (1 + \delta_U)^n \quad \square$$

3.3. Abschätzung durch Jensen-Ungleichung

Da die Funktionen $\Psi_2(t) = \log t$ und $\Psi_3(t) = t^\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$ konkav sind, können mit Hilfe der Jensen-Ungleichung für die Testfunktionen ϕ_2 und ϕ_3 Ungleichungen bewiesen werden, die sich, kombiniert mit anderen Abschätzungen, als sehr brauchbar erweisen, obwohl durch sie stärkere Momentenvoraussetzungen notwendig werden.

Satz 3.12.

Unter den Voraussetzungen (F*), $C_{ix}^{(n)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und $\|x\|$ hinreichend groß gilt für die Testfunktion $\phi_2(x) = \Psi_2(F(x))$ folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathbb{S}}} p_y^i(x) [\phi_2(x+y-e^i) - \phi_2(x)] \leq \\ & \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathbb{S}}} p_y^i(x) [F(x+y-e^i) - F(x)] \end{aligned} \quad (4)$$

Beweis:

$$\Psi_2(t) = \log t$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathbb{S}}} p_y^i(x) [\log F(x+y-e^i) - \log F(x)] \leq \\ & \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \left[\log \left[\overline{\sum_{y \in \mathbb{S}}} p_y^i(x) F(x+y-e^i) \right] - \log F(x) \right] = \\ & \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \log \left[1 + \frac{1}{F(x)} \overline{\sum_{y \in \mathbb{S}}} p_y^i(x) [F(x+y-e^i) - F(x)] \right] \leq \\ & \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathbb{S}}} p_y^i(x) [F(x+y-e^i) - F(x)] \quad \square \end{aligned}$$

Satz 3.13.

Unter den Voraussetzungen (F*), $C_{ix}^{(n)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und $\|x\|$ hinreichend groß gilt für die Testfunktion $\phi_3(x) = \Psi_3(F(x))$ mit $\Psi_3(t) = t^\alpha$ und $0 < \alpha < 1$ folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathbb{S}}} p_y^i(x) [\phi_3(x+y-e^i) - \phi_3(x)] \leq \\ & \alpha F^{\alpha-1}(x) \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathbb{S}}} p_y^i(x) [F(x+y-e^i) - F(x)] \end{aligned} \quad (5)$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathbb{S}}} p_y^i(x) [F^\alpha(x+y-e^i) - F^\alpha(x)] \leq$$

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \left[\left(\sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) F(x+y-e^i) \right)^\alpha - F^\alpha(x) \right] =$$

$$F^\alpha(x) \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \left[\left(1 + \frac{1}{F(x)} \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [F(x+y-e^i) - F(x)] \right)^\alpha - 1 \right]$$

$$\leq \alpha F^{\alpha-1}(x) \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [F(x+y-e^i) - F(x)]$$

(Ungleichung $t^\alpha - 1 \leq \alpha(t-1)$ für $t > 0$ und $0 < \alpha < 1$) $\square$

3.4. Direkte Auswertung

Die beiden Testfunktionen $\phi_4 := (w, x)$, $w \gg 1$, und $\phi_5(x) := (x, Bx)$, B symmetrisch, positiv definit, und geeignet normiert (siehe Abschnitt 1.4.1), stellen Spezialfälle der Testfunktion ϕ_3 dar. Diese Funktionen werden getrennt untersucht, weil sie die einfachsten Testfunktionen sind und eine direkte Auswertung der Summe (*) zulassen. In Verbindung mit den Ungleichungen (4) und (5) oder auch alleine führen sie dann später zu den einfachsten Kriterien.

Satz 3.14.

Unter der Voraussetzung $C_{ix}^{(1)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ gilt für die Testfunktion $\phi_4(x) = (w, x)$ mit $w \gg 0$:

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\phi_4(x+y-e^i) - \phi_4(x)] = (w, V(x)) \quad (8)$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [(w, x+y-e^i) - (w, x)] =$$

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) (w, y-e^i) =$$

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) (w, m_i(x) - e^i) = [w, [M^T(x) - I] \Lambda(x)x] \quad \square$$

Satz 3.15.

Unter der Voraussetzung $C_{ix}^{(2)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ gilt für die Testfunktion $\Phi_5(x) = (x, Bx)$ mit positiv definiter Matrix B folgende Abschätzung:

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathfrak{S}} p_y^i(x) [\Phi_5(x+y-e^i) - \Phi_5(x)]} \leq 2(Bx, V(x)) + \|B\| \|x\| D_x^{(2)} \quad (7)$$

Beweis:

$$(x+y-e^i, B(x+y-e^i)) = (x, Bx) + 2(Bx, y-e^i) + (y-e^i, B(y-e^i))$$

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathfrak{S}} p_y^i(x) [(x+y-e^i, B(x+y-e^i)) - (x, Bx)]} =$$

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathfrak{S}} p_y^i(x) [2(Bx, y-e^i) + (y-e^i, B(y-e^i))]} =$$

$$2[Bx, [M^T(x) - I]\Lambda(x)x]$$

$$+ \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathfrak{S}} p_y^i(x) (y-e^i, B(y-e^i))} \leq$$

$$2(Bx, V(x)) + \|B\| \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \overline{\sum_{y \in \mathfrak{S}} p_y^i(x) \|y-e^i\|^2} =$$

$$2(Bx, V(x)) + \|B\| \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) C_{ix}^{(2)} =$$

$$2(Bx, V(x)) + \|B\| \|x\| D_x^{(2)} \quad \square$$

4. Transienz

Die Bedingungen für Transienz werden mit Hilfe der Testfunktion $\phi_1(x) = \Psi_1(F(x))$ entwickelt. Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen sind die in Satz 3.5 angegebenen Abschätzungen. Die in diesem Satz notwendige Fallunterscheidung bezüglich der Existenz höherer Momente muß weiter beibehalten werden. Dabei gilt es jeweils nachzuweisen, daß unter geeigneten Momentenbedingungen die folgende Ungleichung für alle $x \in \mathbb{S}$ mit $\|x\|$ hinreichend groß erfüllt ist (siehe Satz A0.4):

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\phi_1(x+y-e^i) - \phi_1(x)] \leq 0 \quad (T^*)$$

Satz 4.1.

Es gelte $C_{ix}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in \mathbb{S}$ mit $\|x\|$ hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty$ erfüllt.

Falls eine Funktion F existiert, die (F^*a) und eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ transient.

$$a) \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\delta_u \|x\|) \left[\nabla F(x), V(x) \right]}{\delta_u \|x\|^{n+1} D_x^\varphi} > \delta_u \Gamma_1 + \gamma_1 \quad (1a)$$

$$b) \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-n} \left[\nabla F(x), V(x) \right] > 0 \quad (1b)$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^\varphi < \infty$$

$$c) \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\alpha-n} \left[\nabla F(x), V(x) \right] > 0 \quad (1c)$$

für ein α mit $0 < \alpha < 1$.

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^\varphi < \infty$$

für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1+\alpha}/\varphi(t) = 0$.

Beweis:

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes gilt nach Satz 3.5, Ungleichung (3.1a) für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$:

$$F(x) \log^2 F(x) \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^1(x) [\phi_1(x+y-e^1) - \phi_1(x)] \leq \\ - \left[\nabla F(x), V(x) \right] + \|x\|^n \left[\delta_U(\Gamma_1 + \varepsilon) + \delta_1 \right] \frac{\delta_U \|x\|}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi =: J_1(x)$$

für alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß.

(T*) folgt aus $J_1(x) \leq 0$!

a) $J_1(x) \leq 0$ läßt sich umschreiben zu

$$\frac{\varphi(\delta_U \|x\|) \left[\nabla F(x), V(x) \right]}{\delta_U \|x\|^{n+1} D_x^\varphi} \geq \delta_U(\Gamma_1 + \varepsilon) + \delta_1.$$

Diese Ungleichung ist unter der Bedingung (1a) des Satzes für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ erfüllt.

$$b) \frac{\delta_U \|x\|}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi = o(1)$$

$$\|x\|^{-n} \left[\nabla F(x), V(x) \right] \geq \varepsilon' > 0$$

für ein $\varepsilon' > 0$, wenn $\|x\|$ hinreichend groß.

Somit gilt für alle bis auf endlich viele $x \in S$

$$\|x\|^{-n} \left[\nabla F(x), V(x) \right] \geq [\delta_U(\Gamma_1 + \varepsilon) + \delta_1] \frac{\delta_U \|x\|}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi.$$

Diese Ungleichung wiederum ist äquivalent zu $J_1(x) \leq 0$.

$$c) \frac{\delta_U \|x\|}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi = o(\|x\|^{-\alpha})$$

$$\|x\|^{-n} \left[\nabla F(x), V(x) \right] \geq \varepsilon' \|x\|^{-\alpha}$$

für ein $\varepsilon' > 0$, wenn $\|x\|$ hinreichend groß.

Die weitere Argumentation kann analog zu b) erfolgen. $\square$

Satz 4.2.

Es gelte $C_{ix}^{(2)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß.

Falls eine Funktion F existiert, die (F^*a) und eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ transient.

$$a) \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{[\nabla F(x), V(x)]}{\|x\|^{n-1} D_x^{(2)}} > \Gamma_1 + \gamma_1 / \delta_u \quad (2a)$$

$$b) \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\alpha-n} [\nabla F(x), V(x)] > 0 \quad (2b)$$

für ein α mit $0 < \alpha < 1$.

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^{(2)} < \infty$$

Beweis:

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes $[\varphi(t)=t^2]$ gilt nach Satz 3.5, Ungleichung (3.1b) für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$:

$$F(x) \log^2 F(x) \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [\Phi_1(x+y-e^i) - \Phi_1(x)] \leq \\ - [\nabla F(x), V(x)] + \left[\Gamma_1 + \varepsilon + \gamma_1 / \delta_u \right] \|x\|^{n-1} D_x^{(2)} =: J_2(x)$$

für alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß.

(T*) folgt aus $J_2(x) \leq 0$!

a) $J_2(x) \leq 0$ läßt sich umschreiben zu

$$\frac{[\nabla F(x), V(x)]}{\|x\|^{n-1} D_x^{(2)}} \geq \Gamma_1 + \varepsilon + \gamma_1 / \delta_u.$$

Diese Ungleichung ist unter der Bedingung (2a) des Satzes für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ erfüllt.

$$b) \|x\|^{1-n} [\nabla F(x), V(x)] \geq \varepsilon' \|x\|^{1-\alpha}$$

für ein $\varepsilon' > 0$, wenn $\|x\|$ hinreichend groß.

$$D_x^{(2)} \leq \text{const} < \infty$$

für eine positive Konstante, wenn $\|x\|$ hinreichend groß.

Somit gilt für alle bis auf endlich viele $x \in S$

$$\|x\|^{1-n} [\nabla F(x), V(x)] \geq [\Gamma_1 + \varepsilon + \gamma_1 / \delta_u] D_x^{(2)}.$$

Diese Ungleichung wiederum ist äquivalent zu $J_2(x) \leq 0$. $\square$

Satz 4.3.

Es gelte $C_{ix}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = 0$ erfüllt.

Falls eine Funktion F existiert, die (F^*a) und eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ transient.

$$a) \|x\|^{1-n} [\nabla F(x), V(x)] \geq (\Gamma_1 + \varepsilon) D_x^{(2)} + \frac{\gamma_1}{\delta_u} \frac{\delta_u^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi \quad (3a)$$

für ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß.

$$b) \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{[\nabla F(x), V(x)]}{\|x\|^{n-1} D_x^{(2)}} > \Gamma_1 \quad (3b)$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^\varphi / D_x^{(2)} < \infty$$

$$c) \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{1-n} [\nabla F(x), V(x)] = a, \quad 0 < a < \infty \quad (3c)$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^{(2)} < a / \Gamma_1$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^\varphi / D_x^{(2)} < \infty$$

Beweis:

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes gilt nach Satz 3.5, Ungleichung (3.1c) für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} F(x) \log^2 F(x) & \sum_{i=1}^d \frac{d}{x_i \lambda_i(x)} \sum_{y \in S} p_y^i(x) [\phi_1(x+y-e^i) - \phi_1(x)] \leq \\ & - [\nabla F(x), V(x)] + \|x\|^{n-1} \left\{ (\Gamma_1 + \varepsilon) D_x^{(2)} + \frac{\gamma_1}{\delta_u} \frac{\delta_u^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi \right\} \\ & =: J_3(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß.

(T*) folgt aus $J_3(x) \leq 0$!

a) $J_3(x) \leq 0$ läßt sich umschreiben zu

$$\|x\|^{1-n} [\nabla F(x), V(x)] \geq (\Gamma_1 + \varepsilon) D_x^{(2)} + \frac{\gamma_1}{\delta_u} \frac{\delta_u^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi.$$

$$b) \frac{\delta_u^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_u \|x\|)} \frac{D_x^\varphi}{D_x^{(2)}} \leq \varepsilon',$$

für ein $\varepsilon' > 0$, wenn $\|x\|$ hinreichend groß.

Somit gilt für alle bis auf endlich viele $x \in S$

$$\|x\|^{1-n} [\nabla F(x), V(x)] \geq (\Gamma_1 + \varepsilon) D_x^{(2)} + \frac{\gamma_1}{\delta_u} \frac{\delta_u^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi$$

für geeignetes $\varepsilon > 0$.

c) Aus den ersten beiden Bedingungen von c) folgt die erste Bedingung von b). $\square$

Korollar 4.4.

Es gelte $C_{ix}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) erfüllt.

Falls ein Vektor $w \in \mathbb{R}^d$, $\|w\| > 1$, existiert, der eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ transient.

$$a) \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\alpha-1} (w, V(x)) > 0$$

für ein α mit $0 \leq \alpha < 1$.

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^\varphi < \infty$$

für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1+\alpha}/\varphi(t) = 0$.

$$b) \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} (w, V(x)) = a, \quad 0 < a < \infty$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^{(2)} < \frac{2a}{\|w\|^3}$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^\varphi / D_x^{(2)} < \infty$$

für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$.

Beweis:

Die Aussagen dieses Korollars erhält man durch Einsetzen der in Anmerkung 3.7.b angegebenen Größen in die Bedingungen (1b) und (1c) von Satz 4.1 bzw. Bedingung (3c) von Satz 4.3. $\square$

Korollar 4.5.

Es gelte $C_{1x}^{\varphi} < \infty$ für $1 \leq d$ und alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) erfüllt.

Falls eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ existiert, sodaß die quadratische Form (x, Bx) die Bedingung (F^*a) erfüllt, und diese Matrix eine der folgenden Bedingungen erfüllt, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ transient.

$$a) \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\alpha-2} (Bx, V(x)) > 0$$

für ein α mit $0 \leq \alpha < 1$.

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^{\varphi} < \infty$$

für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1+\alpha}/\varphi(t) = 0$.

$$b) \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-1} (Bx, V(x)) = a, \quad 0 < a < \infty$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^{(2)} < \frac{2a}{(1+2\|B\|)\|B\|^2}$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^{\varphi}/D_x^{(2)} < \infty$$

für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$.

Beweis:

Die Aussagen dieses Korollars erhält man durch Einsetzen der in Anmerkung 3.7.c angegebenen Größen in die Bedingungen (1b) und (1c) von Satz 4.1 bzw. Bedingung (3c) von Satz 4.3. $\square$

Anmerkung 4.6.

Die Aussagen der Sätze 4.1, 4.2 und 4.3 bleiben gültig, wenn in den Bedingungen (1a) bis (3c) $V(x)$ durch $\|x\| V(x)$ und D_x^φ bzw. $D_x^{(2)}$ durch $\tilde{D}_x^\varphi$ bzw. $\tilde{D}_x^{(2)}$ ersetzt werden. Das Analogon zu Bedingung (1b) ist dann z.B:

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{1-n} \left[\nabla F(x), \tilde{V}(x) \right] > 0 \quad (1b')$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \tilde{D}_x^\varphi < \infty$$

Diese Bedingung für $F(x) = (w, x)$ entspricht den Bedingungen (a1) und (b1) von Theorem 1 in Kesten (1976) bei geeigneter Wahl des dortigen Halbkegels.

5. Rekurrenz

Die Bedingungen für Rekurrenz werden mit Hilfe der Testfunktion $\phi_2(x) = \Psi_2(F(x))$ entwickelt. Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen ist die in Satz 3.12 angegebene Ungleichung (3.4) kombiniert mit den Abschätzungen der Sätze 3.8, 3.14 und 3.15. Eine Verwendung der direkten Abschätzungen aus Satz 3.6 ist prinzipiell auch möglich, führt aber durch den Faktor $\gamma_0 \geq 1$ (vergleiche z.B. (3.2b) und (3.2c) mit (3.3b) und (3.3c)) zu schlechteren und selbst für $\gamma_0 = 1$ nicht zu besseren Abschätzungen. Der Homogenitätsgrad n der Funktion F ist allerdings bei Verwendung von Satz 3.8 nicht mehr frei wählbar, da für $n > 1$ die Bedingung " $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n / \varphi(t) = 0$ " wesentlich wird.

Für die Erarbeitung von Rekurrenzkriterien gilt es jeweils nachzuweisen, daß unter geeigneten Momentenbedingungen die folgende Ungleichung für alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß erfüllt ist (siehe Satz A0.5):

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [\phi_2(x+y-e^i) - \phi_2(x)] \leq 0 \quad (R^*)$$

Da ϕ_2 nicht beschränkt ist, muß, damit ϕ_2 überhaupt als Testfunktion verwendbar ist,

$$E \log(1 + \|\xi_{ix}\|) < \infty \quad (R^{**})$$

für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S_1$ gefordert werden. Dies folgt aber schon z.B. aus $m_{ij}(x) < \infty$, $1 \leq i, j \leq d$, oder äquivalent dazu $C_{ix}^{(1)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S_1$.

Satz 5.1.

Es gelte

$$E \log(1 + \|\xi_{ix}\|) < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$$C_{ix}^{(1)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S \text{ mit } \|x\| \text{ hinreichend groß.}$$

Falls ein $N > 0$ und ein $w \in \mathbb{R}^d$, $w \gg 0$, existieren, sodaß

$$(w, V(x)) \leq 0 \quad (1)$$

für alle $x \in S_N$, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ rekurrent.

Beweis:

Durch Kombination der Abschätzungen (3.4) und (3.6) erhält man

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [\log(w, x+y-e^i) - \log(w, x)] \leq \frac{(w, V(x))}{(w, x)}$$

Somit ist (R*) unter der Bedingung dieses Satzes erfüllt. $\square$

Satz 5.2.

Es gelte

$$E \log(1 + \|\xi_{ix}\|) < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$$C_{ix}^{(2)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S \text{ mit } \|x\| \text{ hinreichend groß.}$$

Falls ein $N > 0$ und eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ existieren, sodaß $(x, Bx) > 0$ für $x \in K_+$ und

$$\|x\|^{-1} (Bx, V(x)) \leq -\frac{1}{2} \|B\| D_x^{(2)} \quad (2)$$

für alle $x \in S_N$, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ rekurrent.

Beweis:

Durch Kombination der Abschätzungen (3.4) und (3.7) erhält man

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [\log(x+y-e^i, B(x+y-e^i)) - \log(x, Bx)] \leq \frac{2 (Bx, V(x)) + \|x\| \|B\| D_x^{(2)}}{(x, Bx)}$$

Somit ist (R*) unter der Bedingung dieses Satzes erfüllt. $\square$

Satz 5.3.

Es gelte

$$E \log(1 + \|\xi_{ix}\|) < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$C_{ix}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty$ erfüllt.

Falls es ein $\varepsilon > 0$ und ein $N > 0$ gibt und eine Funktion F existiert, die (F^*b) mit $0 < n < 2$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n/\varphi(t) = 0$ erfüllt, sodaß

$$\|x\|^{-n} [\nabla F(x), V(x)] \leq -\delta_u \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_2 + \varepsilon) + \Gamma_3 \right\} \frac{\delta_u^2 \|x\|}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi \quad (3)$$

für alle $x \in S_N$, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ rekurrent.

Beweis:

Durch Kombination der Abschätzungen (3.4) und (3.3a) erhält man

$$F(x) \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [\log F(x+y-e^i) - \log F(x)] \leq$$

$$[\nabla F(x), V(x)] + \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_2 + \varepsilon) + \Gamma_3 \right\} \frac{\delta_u^2 \|x\|^{n+1}}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi$$

Somit ist (R^*) unter der Bedingung dieses Satzes erfüllt. $\square$

Satz 5.4.

Es gelte

$$E \log(1 + \|\xi_{ix}\|) < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$C_{ix}^{(2)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß.

Falls es ein $\varepsilon > 0$ und ein $N > 0$ gibt und eine Funktion F existiert, die (F^*b) mit $0 < n < 2$ erfüllt, sodaß

$$\|x\|^{1-n} [\nabla F(x), V(x)] \leq - \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_2 + \varepsilon) + \Gamma_3 \right\} D_x^{(2)} \quad (4)$$

für alle $x \in S_N$, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ rekurrent.

Satz 5.5.

Es gelte

$$E \log(1 + \|\xi_{ix}\|) < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$C_{ix}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$ erfüllt.

Falls es ein $N > 0$ gibt und eine Funktion F existiert, die (F^*b) mit $n=2$ erfüllt, sodaß

$$\|x\|^{1-n} \left\{ \nabla F(x) \cdot \nabla V(x) \right\} \leq -\frac{1}{2} \gamma_2 D_x^{(2)} - \gamma_3 \frac{\delta_u^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi \quad (5)$$

für alle $x \in S_N$, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ rekurrent.

Der Beweis dieser beiden Sätze verläuft analog zum Beweis von Satz 5.3 unter Verwendung der Ungleichungen (3.4) und (3.3b) bzw. (3.3d).

Anmerkung 5.6.

a) Aufgrund der gleichen Überlegungen die zu Anmerkung I.5.3 führten, kann in den Sätzen 5.1 bis 5.5 auf die Bedingung

$$E \log(1 + \|\xi_{ix}\|) < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1$$

verzichtet werden.

b) Die Aussagen der Sätze 5.1 bis 5.5 bleiben gültig, wenn in den Bedingungen (1) bis (5) $V(x)$ durch $\|x\| V(x)$ und D_x^φ bzw. $D_x^{(2)}$ durch $\tilde{D}_x^\varphi$ bzw. $\tilde{D}_x^{(2)}$ ersetzt werden.

c) Der Übergang zu "lim sup"-Bedingungen führt zu Kriterien, wie sie in den Sätzen des nächsten Kapitels enthalten sind.

So sind z.B. die Bedingungen der Sätze 6.3, 6.6, 6.10 und 6.11, jeweils ohne die erste Momentenbedingung für alle $x \in S_1$, hinreichend für Transienz.

8. Ergodizität

Die zu den Ungleichungen (T*) und (R*) analoge Bedingung für Ergodizität ist nach Satz A0.6

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\phi(x+y-e^i) - \phi(x)] \leq -\varepsilon$$

für den Prozeß $\{Z(t)\}$, bzw.

$$\sum_{i=1}^d \frac{x_i \lambda_i(x)}{(x, \lambda(x))} \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\phi(x+y-e^i) - \phi(x)] \leq -\varepsilon$$

für den Sprungprozeß $\{X_n\}$, jeweils für ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in \mathbb{S}$ mit $\|x\|$ hinreichend groß. Durch die Voraussetzung $\varepsilon > 0$ sind diese beiden Ungleichungen nicht mehr beliebig umnormierbar und somit nicht mehr identisch wie bei den Untersuchungen bezüglich Transienz und Rekurrenz mit $\varepsilon = 0$, sodaß im folgenden zwischen Ergodizitätsbedingungen für $\{Z(t)\}$ und $\{X_n\}$ unterschieden werden muß. Die oben angegebenen Ungleichungen werden zur Entwicklung dieser Kriterien in der äquivalenten Form

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\phi(x+y-e^i) - \phi(x)] < 0 \quad (E^*)$$

bzw.

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^d \frac{x_i \lambda_i(x)}{(x, \lambda(x))} \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\phi(x+y-e^i) - \phi(x)] < 0 \quad (E^*S)$$

verwendet. Geeignete Testfunktionen sind ϕ_2 , ϕ_3 und als Spezialfälle noch ϕ_4 und ϕ_5 , wobei wiederum die obige Bedingung $\varepsilon > 0$ dafür verantwortlich ist, daß eine Testfunktion für die angestrebten Untersuchungen nicht mehr ausreicht.

Da die erwähnten Funktionen alle unbeschränkt wachsen, ist einerseits die Voraussetzung in Satz A0.6, daß die untersuchten Prozesse rekurrent sein müssen, trivialerweise erfüllt, wenn (E*) bzw. (E*S) gelten, andererseits muß aber, damit diese Funktionen überhaupt als Testfunktionen anwendbar sind,

$$E\Psi(\|\xi_{ix}\|^n) < \infty \quad (E^{**})$$

jeweils für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in \mathbb{S}_1$ gefordert werden. Diese Bedingung folgt bei ϕ_2 , ϕ_3 mit $\alpha n \leq 1$ und ϕ_4 schon aus $m_{ij}(x) < \infty$, $1 \leq i, j \leq d$, oder äquivalent dazu $C_{1x}^{(1)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in \mathbb{S}_1$, stellt aber für ϕ_3 mit $\alpha n > 1$ oder ϕ_5 eine erhebliche Restriktion dar.

Vorbemerkung 6.0.

Der Sprungprozeß $\{X_n\}$ sei ergodisch und es gelte

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} (x, \lambda(x)) > 0.$$

Dann ist auch der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

Beweis:

Da $\{X_n\}$ ergodisch ist, existiert eine geeignete Testfunktion $\Phi: S_* \rightarrow \mathbb{R}_+$, die die Bedingung (E*S) erfüllt. (Siehe auch die Überlegungen im Abschnitt "Allgemeine Abschätzungen" zur Erweiterung des Definitionsbereichs von Φ .)

Diese Testfunktion erfüllt wegen der Voraussetzung an $(x, \lambda(x))$ dann auch die Bedingung (E*). $\square$

Eine Umkehrung dieser Vorbemerkung zu formulieren ist nicht sinnvoll, weil dafür $\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} (x, \lambda(x)) < \infty$ gefordert werden müßte, aber $(x, \lambda(x))$ im allgemeinen bei Populationen nicht beschränkt bleibt.

Satz 6.1.

Es gelte

$$E \log(1 + \|\xi_{ix}\|) < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1.$$

$$C_{ix}^{(1)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S \text{ mit } \|x\| \text{ hinreichend groß.}$$

Falls ein $w \in \mathbb{R}^d$, $w \gg 0$, existiert, sodaß

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-1} (w, V(x)) < 0 \quad (1)$$

so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

Beweis:

Durch Kombination von Ungleichung (3.4) und Gleichung (3.6) erhält man

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [\log(w, x+y-e^i) - \log(w, x)] \leq$$

$$\frac{(w, V(x))}{(w, x)} \leq \delta \|x\|^{-1} (w, V(x)) \quad \text{für ein } \delta > 0. \quad \square$$

Satz 6.2.

Es gelte für ein α mit $0 < \alpha < 1$

$$C_{ix}^{(\alpha)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$$C_{ix}^{(1)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S \text{ mit } \|x\| \text{ hinreichend groß.}$$

Falls ein $w \in \mathbb{R}^d$, $w \gg 0$, existiert, sodaß

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\alpha-1} (w, V(x)) < 0 \quad (2)$$

so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

Beweis:

Durch Kombination von Ungleichung (3.5) und Gleichung (3.6) erhält man

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [(w, x+y-e^i)^\alpha - (w, x)^\alpha] \leq$$

$$\alpha (w, x)^{\alpha-1} (w, V(x)) \leq \delta \|x\|^{\alpha-1} (w, V(x))$$

für ein $\delta > 0$. $\square$

Satz 6.3.

Es gelte $C_{ix}^{(1)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S_1$.

Falls ein $w \in \mathbb{R}^d$, $w \gg 0$, existiert, sodaß

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} (w, V(x)) < 0 \quad (3)$$

so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

Falls ein $w \in \mathbb{R}^d$, $w \gg 0$, existiert, sodaß

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} (w, \tilde{V}(x)) < 0 \quad (3S)$$

so ist der Sprungprozeß $\{X_n\}$ ergodisch.

Beweis:

Nach Gleichung (3.6) gilt

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [(w, x+y-e^i) - (w, x)] = \\ (w, V(x)) = (x, \lambda(x))(w, \tilde{V}(x)) \quad \square$$

Die Bedingung (3S) entspricht der Bedingung (b2) von Theorem 2 in Kesten (1976) bei geeigneter Wahl des dortigen Halbkugels.

Satz 6.4.

Es gelte

$$E \log(1 + \|f_{i,x}\|) < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1.$$

$$C_{ix}^{(2)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S \text{ mit } \|x\| \text{ hinreichend groß.}$$

Falls eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ existiert, die $(x, Bx) > 0$ für $x \in K_+$ und eine der folgenden Bedingungen erfüllt, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

$$a) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-1} \left\{ \|x\|^{-1} (Bx, V(x)) + \frac{1}{2} \|B\| D_x^{(2)} \right\} < 0 \quad (4a)$$

$$b) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-2} (Bx, V(x)) < 0 \quad (4b)$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-1} D_x^{(2)} = 0$$

Beweis:

Durch Kombination der Abschätzungen (3.4) und (3.7) erhält man

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [\log(x+y-e^i, B(x+y-e^i)) - \log(x, Bx)] \\ \leq \frac{2 (Bx, V(x)) + \|x\| \|B\| D_x^{(2)}}{(x, Bx)} \leq \\ \gamma \left[2 \|x\|^{-2} (Bx, V(x)) + \frac{\|B\|}{\|x\|} D_x^{(2)} \right] \\ \text{für ein } \gamma > 0.$$

Somit ist (E*) unter jeder Bedingung dieses Satzes erfüllt. $\square$

Satz 6.5.

Es gelte für ein α mit $0 < \alpha < 1$

$$C_{ix}^{(2\alpha)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$$C_{ix}^{(2)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S \text{ mit } \|x\| \text{ hinreichend groß.}$$

Falls eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ existiert, die $(x, Bx) > 0$ für $x \in K_+$ und die folgende Bedingung erfüllt, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{2\alpha-1} \left[\|x\|^{-1} (Bx, V(x)) + \frac{1}{2} \|B\| D_x^{(2)} \right] < 0 \quad (5)$$

Beweis:

Durch Kombination der Abschätzungen (3.5) und (3.7) erhält man

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [(x+y-e^i, B(x+y-e^i))^\alpha - (x, Bx)^\alpha] \leq$$

$$\alpha (x, Bx)^{\alpha-1} \left[2 (Bx, V(x)) + \|x\| \|B\| D_x^{(2)} \right] \leq$$

$$\gamma \|x\|^{2\alpha-1} \left[\|x\|^{-1} (Bx, V(x)) + \frac{1}{2} \|B\| D_x^{(2)} \right]$$

für ein $\gamma > 0$. $\square$

Satz 6.6.

Es gelte $C_{ix}^{(2)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S_1$.

Falls eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ existiert, die $(x, Bx) > 0$ für $x \in K_+$ und die Bedingung

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\| \left[\|x\|^{-1} (Bx, V(x)) + \frac{1}{2} \|B\| D_x^{(2)} \right] < 0 \quad (6)$$

erfüllt, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

Falls eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ existiert, die $(x, Bx) > 0$ für $x \in K_+$ und die Bedingung

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left[(Bx, \tilde{V}(x)) + \frac{1}{2} \|B\| \tilde{D}_x^{(2)} \right] < 0 \quad (6S)$$

erfüllt, so ist der Sprungprozeß $\{X_n\}$ ergodisch.

Beweis:

Nach Ungleichung (3.7) gilt

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [(x+y-e^i, B(x+y-e^i)) - (x, Bx)] \leq$$

$$2(Bx, V(x)) + \|x\| \|B\| D_x^{(2)} = (x, \lambda(x)) [2(Bx, \tilde{V}(x)) + \|B\| \tilde{D}_x^{(2)}] \quad \square$$

Korollar 6.7.

Es gelte $C_{ix}^{(2)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S_1$.

Falls eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ existiert, die $(x, Bx) > 0$ für $x \in K_+$ und eine der folgenden Bedingungen erfüllt, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

$$a) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-1} (Bx, V(x)) = -a, \quad 0 < a < \infty \quad (6a)$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^{(2)} < \frac{2a}{\|B\|}$$

$$b) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-1-\alpha} (Bx, V(x)) < 0 \quad \text{für ein } \alpha > 0 \quad (6b)$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^{(2)} < \infty$$

Beweis:

Aus jeder der beiden Bedingungen folgt Bedingungen (8) von Satz 6.6. $\square$

Korollar 6.8.

Es gelte $C_{ix}^{(2)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S_1$.

Falls eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ existiert, die $(x, Bx) > 0$ für $x \in K_+$ und eine der folgenden Bedingungen erfüllt, so ist der Sprungprozeß $\{X_n\}$ ergodisch.

$$a) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} (Bx, \tilde{V}(x)) = -a, \quad 0 < a < \infty \quad (6Sa)$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \tilde{D}_x^{(2)} < \frac{2a}{\|B\|}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-\alpha} (Bx, \tilde{V}(x)) &< 0 \quad \text{für ein } \alpha > 0 \\ \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \tilde{D}_x^{(2)} &< \infty \end{aligned} \quad (6Sb)$$

Beweis:

Aus jeder der beiden Bedingungen folgt Bedingungen (6S) von Satz 6.8. $\square$

Satz 6.9.

Es gelte

$$E \log(1 + \|\xi_{i,x}\|) < \infty \quad \text{für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$C_{i,x}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty$ erfüllt.

Falls eine Funktion F existiert, die (F^*b) mit $0 < n < 2$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n/\varphi(t) = 0$ erfüllt, und die folgende Bedingung gilt, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-n} [\nabla F(x), V(x)] < 0 \quad (7)$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^\varphi < \infty$$

Beweis:

Durch Kombination der Abschätzungen (3.4) und (3.3a) erhält man

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [\log F(x+y-e^i) - \log F(x)] \leq$$

$$\frac{1}{F(x)} [\nabla F(x), V(x)] + \frac{\delta_u \|x\|^n}{F(x)} \left[\frac{1}{2}(\gamma_2 + \varepsilon) + \Gamma_3 \right] \frac{\delta_u \|x\|}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi \leq$$

$$\|x\|^{-n} [\nabla F(x), V(x)] + \delta_u \left[\frac{1}{2}(\gamma_2 + \varepsilon) + \Gamma_3 \right] \frac{\delta_u \|x\|}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi =$$

$$\|x\|^{-n} [\nabla F(x), V(x)] + o(1) \quad \square$$

Satz 6.10.

Es gelte für ein n mit $0 < n \leq 2$

$$C_{ix}^{(n)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$$C_{ix}^\varphi < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S \text{ mit } \|x\| \text{ hinreichend groß für eine Funktion } \varphi, \text{ die } (\varphi^*) \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} t^n / \varphi(t) = 0 \text{ erfüllt.}$$

Falls eine Funktion F existiert, die (F^*b) mit dem oben gegebenen n erfüllt, sodaß eine der folgenden Bedingungen gilt, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ ergodisch.

$$a) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left\{ \left[\nabla F(x), V(x) \right] + \left[\frac{1}{2} \gamma_2 + \gamma_3 \right] \frac{\delta_U^2 \|x\|^{n+1}}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi \right\} < 0 \quad (8a)$$

$$\text{falls } 0 < n < 2 \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = \infty.$$

$$b) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left\{ \left[\nabla F(x), V(x) \right] + \|x\|^{n-1} \left[\frac{1}{2} \gamma_2 + \gamma_3 \right] D_x^{(2)} \right\} < 0 \quad (8b)$$

$$\text{falls } 0 < n < 2 \text{ und } \varphi(t) = t^2.$$

$$c) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left\{ \left[\nabla F(x), V(x) \right] + \right. \quad (8c)$$

$$\left. \|x\|^{n-1} \left[\frac{1}{2} \gamma_2 D_x^{(2)} + \gamma_3 \frac{\delta_U^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_U \|x\|)} D_x^\varphi \right] \right\} < 0$$

$$\text{falls } 0 < n \leq 2 \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = 0.$$

Beweis:

Durch Einsetzen der Bedingungen des Satzes in die Ungleichungen (3.3a), (3.3b) und (3.3c) bzw. (3.3d) folgt (E^*) . $\square$

Satz 8.11.

Es gelte für ein n mit $0 < n \leq 2$

$$C_{ix}^{(n)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1.$$

$C_{ix}^\varphi < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß für eine Funktion φ , die (φ^*) und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n / \varphi(t) = 0$ erfüllt.

Falls eine Funktion F existiert, die (F^*b) mit dem oben gegebenen n erfüllt, sodaß eine der folgenden Bedingungen gilt, so ist der Sprungprozeß $\{X_n\}$ ergodisch.

$$a) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left\{ \left[\nabla F(x), \tilde{V}(x) \right] + \left[\frac{1}{2} \gamma_2 + \gamma_3 \right] \frac{\delta_u^2 \|x\|^n}{\varphi(\delta_u \|x\|)} \tilde{D}_x^\varphi \right\} < 0 \quad (8Sa)$$

falls $0 < n < 2$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = \infty$.

$$b) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left\{ \left[\nabla F(x), \tilde{V}(x) \right] + \|x\|^{n-2} \left[\frac{1}{2} \gamma_2 + \gamma_3 \right] \tilde{D}_x^{(2)} \right\} < 0 \quad (8Sb)$$

falls $0 < n < 2$ und $\varphi(t) = t^2$.

$$c) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left\{ \left[\nabla F(x), \tilde{V}(x) \right] + \right. \quad (8Sc)$$

$$\left. \|x\|^{n-2} \left[\frac{1}{2} \gamma_2 \tilde{D}_x^{(2)} + \gamma_3 \frac{\delta_u^2 \|x\|^2}{\varphi(\delta_u \|x\|)} \tilde{D}_x^\varphi \right] \right\} < 0$$

falls $0 < n \leq 2$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 / \varphi(t) = 0$.

Beweis:

Unter Berücksichtigung von

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{(x, \lambda(x))} V(x)$$

$$\tilde{D}_x^\varphi = \frac{\|x\|}{(x, \lambda(x))} D_x^\varphi$$

folgt (E*S) durch Einsetzen der Bedingungen des Satzes in die Ungleichungen (3.3a), (3.3b) und (3.3c) bzw. (3.3d). $\square$

Dieser Satz liefert einen exakten Beweis der mehr heuristischen Überlegungen von Kingman (1961), angewandt auf den Sprungprozeß $\{X_n\}$.

7. Geometrische Ergodizität

7.1. Der Prozeß $\{Z(t)\}$

Die zu den Ungleichungen (T*) und (R*) analoge Bedingung für geometrische Ergodizität des Prozesses $\{Z(t)\}$ ist nach Satz A0.7

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\Phi(x+y-e^i) - \Phi(x)] \leq -\delta \Phi(x) - \varepsilon$$

für ein $\delta > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in \mathbb{S}$ mit $\|x\|$ hinreichend groß. Die geeignete Testfunktion ist Φ_3 und als Spezialfälle Φ_4 und Φ_5 . Da diese Funktionen gegen unendlich streben, ist die obige Bedingung äquivalent zu

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(x)} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\Phi(x+y-e^i) - \Phi(x)] < 0 \quad (G^*)$$

Genau wie im Falle der Ergodizität ist die Voraussetzung, daß die untersuchten Prozesse rekurrent sein müssen, trivialerweise erfüllt. Es bleibt dann noch die Voraussetzung

$$E\P(\|\xi_{ix}\|^n) < \infty \quad (G^{**})$$

für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in \mathbb{S}_1$, um dieses Kriterium überhaupt anwenden zu können. Diese Bedingung folgt bei Φ_3 mit $\alpha_n \leq 1$ und Φ_4 schon aus $m_{ij}(x) < \infty$, $1 \leq i, j \leq d$, oder äquivalent dazu $C_{1x}^{(1)} < \infty$ für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in \mathbb{S}_1$, stellt aber für Φ_3 mit $\alpha_n > 1$ oder Φ_5 eine erhebliche Restriktion dar.

Vorbemerkung 7.0.

Der Sprungprozeß $\{X_n\}$ sei ergodisch und es gelte für die Testfunktion Φ , die (E*S) erfüllt,

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{(x, \lambda(x))}{\Phi(x)} > 0.$$

Dann ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ geometrisch ergodisch.

Beweis:

Die Bedingung (G*) ist äquivalent zu

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{(x, \lambda(x))}{\Phi(x)} \sum_{i=1}^d \frac{x_i \lambda_i(x)}{(x, \lambda(x))} \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\Phi(x+y-e^i) - \Phi(x)] < 0$$

Somit folgt (G*) unter der Voraussetzung an Φ aus (E*S). $\square$

Satz 7.1.

Es gelte für ein α mit $0 < \alpha \leq 1$

$$C_{ix}^{(\alpha)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$$C_{ix}^{(1)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S \text{ mit } \|x\| \text{ hinreichend groß.}$$

Falls ein $w \in \mathbb{R}^d$, $w \gg 0$, existiert, sodaß

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-1} (w, V(x)) < 0 \quad (1)$$

so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ geometrisch ergodisch.

Beweis:

Durch Kombination von Ungleichung (3.5) und Gleichung (3.6) erhält man

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [(w, x+y-e^i)^\alpha - (w, x)^\alpha] \leq$$

$$\alpha (w, x)^{\alpha-1} (w, V(x)) \leq \gamma (w, x)^\alpha \|x\|^{-1} (w, V(x))$$

für ein $\gamma > 0$. $\square$

Satz 7.2.

Es gelte für ein α mit $0 < \alpha \leq 1$

$$C_{ix}^{(2\alpha)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$$C_{ix}^{(1)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S \text{ mit } \|x\| \text{ hinreichend groß.}$$

Falls eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ existiert, die $(x, Bx) > 0$ für $x \in K_+$ und eine der folgenden Bedingungen erfüllt, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ geometrisch ergodisch.

$$a) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-1} \left\{ \|x\|^{-1} (Bx, V(x)) + \frac{1}{2} \|B\| D_x^{(2)} \right\} < 0 \quad (2a)$$

$$b) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-2} (Bx, V(x)) < 0 \quad (2b)$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-1} D_x^{(2)} = 0$$

Beweis:

Durch Kombination der Abschätzungen (3.5) und (3.7) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [(x+y-e^i, B(x+y-e^i))^\alpha - (x, Bx)^\alpha] &\leq \\ \alpha (x, Bx)^{\alpha-1} \left\{ 2 (Bx, V(x)) + \|x\| \|B\| D_x^{(2)} \right\} &\leq \\ \gamma (x, Bx)^\alpha \|x\|^{-1} \left\{ \|x\|^{-1} (Bx, V(x)) + \frac{1}{2} \|B\| D_x^{(2)} \right\} & \\ \text{für ein } \gamma > 0. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 7.3.

Es gelte für ein n mit $0 < n < 2$

$$C_{ix}^{(n)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in \mathbb{S}_1.$$

$$C_{ix}^\varphi < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in \mathbb{S} \text{ mit } \|x\| \text{ hinreichend groß für eine Funktion } \varphi, \text{ die } (\varphi^*) \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty \text{ erfüllt.}$$

Falls eine Funktion F existiert, die (F^*b) mit $0 < n < 2$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n/\varphi(t) = 0$ erfüllt, und die folgende Bedingung gilt, so ist der Prozeß $\{Z(t)\}$ geometrisch ergodisch.

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-n} [\nabla F(x), V(x)] < 0 \quad (3)$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^\varphi < \infty$$

Beweis:

Mit der Abschätzung (3.3a) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [F(x+y-e^i) - F(x)] &\leq \\ \frac{1}{F(x)} [\nabla F(x), V(x)] + \frac{\delta_u \|x\|^n}{F(x)} \left[\frac{1}{2} (\gamma_2 + \varepsilon) + \Gamma_3 \right] \frac{\delta_u \|x\|}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi &\leq \\ \|x\|^{-n} [\nabla F(x), V(x)] + \delta_u \left[\frac{1}{2} (\gamma_2 + \varepsilon) + \Gamma_3 \right] \frac{\delta_u \|x\|}{\varphi(\delta_u \|x\|)} D_x^\varphi &= \\ \|x\|^{-n} [\nabla F(x), V(x)] + o(1) \quad \square \end{aligned}$$

7.2. Der Prozeß $\{X_n\}$

Die zu den Ungleichungen (T*) und (R*) analoge Bedingung für geometrische Ergodizität des Sprungprozesses $\{X_n\}$ ist nach Satz A0.7

$$\sum_{i=1}^d \frac{x_i \lambda_i(x)}{(x, \lambda(x))} \sum_{y \in S} p_y^i(x) [\phi(x+y-e^i) - \phi(x)] \leq -\delta \phi(x) - \varepsilon$$

für ein $\delta > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß. Diese Ungleichung ist aber mit Momentenbedingungen nicht erfüllbar, wie schon der eindimensionale Prozeß zeigt (siehe Kapitel I.7). Für Spezialfälle bei genauer Kenntnis der Nachkomensverteilungen bietet sich höchstens eine Testfunktion der Form

$$\phi(x) = e^{\beta F(x)} \quad \text{für ein } \beta > 0$$

an, vergleiche Spezialfall I.7.4.

8. Stationäre Maße

Voraussetzung für dieses Kapitel:

$\{Z(t)\}$ und somit auch $\{X_n\}$ seien rekurrent.

Unter dieser Voraussetzung existiert zu jedem Prozeß ein stationäres Maß. Das stationäre Maß von $\{Z(t)\}$ werde mit μ und das von $\{X_n\}$ mit $\tilde{\mu}$ bezeichnet. Diese Maße sind auf der Potenzmenge von S_1 definiert, sie sind unter den Bedingungen (1.3'), (1.3'') und (1.6) eindeutig bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstanten, und sie erfüllen die folgenden Gleichungssysteme (zur Vereinfachung der Schreibweise sei $\mu_x = \mu(\{x\})$, $\tilde{\mu}_x = \tilde{\mu}(\{x\})$, $\mu_0 = \tilde{\mu}_0 = 0$).

$$(y, \lambda(y)) \mu_y = \sum_{\substack{x \in S \\ y-x \in S_*}} \mu_x \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) p_{y-x+e_i}^i(x) \quad \text{für } y \in S_1 \quad (1)$$

$$\tilde{\mu}_y = \sum_{\substack{x \in S \\ y-x \in S_*}} \tilde{\mu}_x \sum_{i=1}^d \frac{x_i \lambda_i(x)}{(x, \lambda(x))} p_{y-x+e_i}^i(x) \quad \text{für } y \in S_1 \quad (2)$$

Aus diesen beiden Gleichungssystemen folgt insbesondere

$$\mu_x = \tilde{\mu}_x = 0 \quad \text{für } x \in S_1 - S_N,$$

mit N aus den Voraussetzungen (1.3'), (1.3'') und (1.6), und wegen der Eindeutigkeit

$$\tilde{\mu}_x = \gamma (x, \lambda(x)) \mu_x \quad \text{für ein } \gamma > 0 \text{ und alle } x \in S_1.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise sei:

$$g(s) := \sum_{y \in S} \mu_y s^y \quad \text{für } s \in \mathbb{C}^d$$

$$\tilde{g}(s) := \sum_{y \in S} \tilde{\mu}_y s^y \quad \text{für } s \in \mathbb{C}^d$$

$r(\tilde{r})$ sei der Radius des Konvergenzkreises von g ($\tilde{g}$) um den Nullpunkt, wobei möglicherweise der Fall $r=0$ ($\tilde{r}=0$) eintritt. Falls $\|\lambda(x)\|_\infty$ und $\|\lambda(x)\|_\infty^{-1}$ nicht zu schnell anwachsen (höchstens polynomial), gilt $r = \tilde{r}$.

Bedingungen für $r \geq 1$ bzw. $\tilde{r} \geq 1$ sind implizit in den Sätzen 8.3 und 8.6 des Abschnitts 8.2 enthalten.

8.1. Funktionalgleichung

Satz 8.1.

Falls $r > 0$, so erfüllt das stationäre Maß μ die folgende Funktionalgleichung für $s \in \mathbb{C}^d$, $|s_i| < \min(1, r)$:

$$\sum_{x \in \mathbb{S}} \mu_x s^x \left[(x, \lambda(x)) s^1 - \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) s^{1-e^i} f^i(s, x) \right] = 0$$

Falls $\tilde{r} > 0$, so erfüllt das stationäre Maß $\tilde{\mu}$ die folgende Funktionalgleichung für $s \in \mathbb{C}^d$, $|s_i| < \min(1, \tilde{r})$:

$$\sum_{x \in \mathbb{S}} \tilde{\mu}_x s^x \left[s^1 - \sum_{i=1}^d \frac{x_i \lambda_i(x)}{(x, \lambda(x))} s^{1-e^i} f^i(s, x) \right] = 0$$

Beweis:

Zur Vereinfachung der Beweisführung sei

$$f^i(s, 0) := \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(0) s^y := 1 \quad \text{für } 1 \leq i \leq d$$

$$\lambda_i(0) := 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq d.$$

Nach Gleichung (1) gilt für $y \in \mathbb{S}_1$:

$$(y, \lambda(y)) \mu_y = \sum_{\substack{x \in \mathbb{S} \\ y-x \in \mathbb{S}_*}} \mu_x \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) p_{y-x+e^i}^i(x)$$

Zur Abkürzung sei

$$a_i(x) := x_i \lambda_i(x).$$

Die obige Gleichung läßt sich damit umschreiben zu

$$(y, \lambda(y)) \mu_y = \sum_{i=1}^d \sum_{\substack{z \in \mathbb{S} \\ y-z+e^i \in \mathbb{S}}} a_i(y-z+e^i) p_z^i(y-z+e^i) \mu_{y-z+e^i}$$

Multiplikation mit s^{y+1} und Summation über $y \in \mathbb{S}$ liefert dann

$$\sum_{y \in \mathbb{S}} (y, \lambda(y)) \mu_y s^{y+1} =$$

$$\sum_{y \in \mathbb{S}} \sum_{i=1}^d \sum_{\substack{z \in \mathbb{S} \\ y-z+e^i \in \mathbb{S}}} \left[a_i(y-z+e^i) s^{1-e^i} p_z^i(y-z+e^i) s^z \mu_{y-z+e^i} s^{y-z+e^i} \right]$$

Vertauschung der Summation führt zu

$$\sum_{i=1}^d s^{1-e^i} \sum_{z \in \mathbb{S}} \sum_{\substack{y \in \mathbb{S} \\ y-z+e^i \in \mathbb{S}}} \left[a_i(y-z+e^i) p_z^i(y-z+e^i) s^z \mu_{y-z+e^i} s^{y-z+e^i} \right]$$

Die Substitution $y(i) := y+e^i-z$ ergibt

$$\sum_{i=1}^d s^{1-e^i} \sum_{z \in \mathbb{S}} \sum_{y(i) \in \mathbb{S}} a_i(y(i)) p_z^i(y(i)) s^z \mu_{y(i)} s^{y(i)}$$

Ersetzt man $y(i)$ durch x und vertauscht wiederum die Summation, so erhält man

$$\sum_{i=1}^d s^{1-e^i} \sum_{x \in \mathbb{S}} a_i(x) \mu_x s^x \sum_{z \in \mathbb{S}} p_z^i(x) s^z =$$

$$\sum_{x \in \mathbb{S}} \mu_x s^x \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) s^{1-e^i} f^i(s, x).$$

Dieses Ergebnis führt dann zu der Funktionalgleichung.

Nach Gleichung (2) gilt für $y \in \mathbb{S}_1$:

$$\tilde{\mu}_y = \sum_{\substack{x \in \mathbb{S} \\ y-x \in \mathbb{S}_*}} \tilde{\mu}_x \sum_{i=1}^d \frac{x_i \lambda_i(x)}{(x, \lambda(x))} p_{y-x+e^i}^i(x)$$

Der weitere Beweis verläuft völlig analog. $\square$

8.2. Existenz der Momente

Die weitere Untersuchung der stationären Maße bezüglich der Existenz von Momenten kann mit analogen Kriterien erfolgen, wie sie zur Erarbeitung der Bedingungen für Ergodizität bzw. geometrische Ergodizität verwendet wurden. Hinreichende Bedingungen dafür sind in Satz A0.10 zusammengestellt, der auf eine Arbeit von Tweedie (1983) zurückgeht. An Stelle der dortigen sehr allgemeinen Funktion ψ , werden nur Potenzfunktionen der Norm mit beliebigem Exponenten untersucht, d.h. es werden Bedingungen angegeben dafür, daß

$$\sum_{x \in \mathbb{S}_1} \mu_x \|x\|^\nu < \infty \quad (M)$$

bzw.

$$\sum_{x \in \mathbb{S}_1} \tilde{\mu}_x \|x\|^\nu < \infty \quad (MS)$$

für ein $\nu \in \mathbb{R}$, wobei nicht notwendig $\nu \geq 0$ sein muß. Die den Bedingungen (E*) bzw. (E*S) und (G*) analogen Ungleichungen für die Gültigkeit von (M) bzw. (MS) sind (Ungleichung (A0.7a) bzw. (A0.7b) umgeschrieben als "lim sup"-Bedingungen)

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-\nu} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\phi(x+y-e^i) - \phi(x)] < 0 \quad (M^*)$$

bzw.

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-\nu} \sum_{i=1}^d \frac{x_i \lambda_i(x)}{(x, \lambda(x))} \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\phi(x+y-e^i) - \phi(x)] < 0 \quad (M^*S)$$

jeweils für eine geeignete Testfunktion ϕ , die (Ungleichung (A0.5a) bzw. (A0.5b) umgeschrieben als "lim inf"-Bedingungen)

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-\nu} (x, \lambda(x)) \phi(x) > 0 \quad (M^{*'})$$

bzw.

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-\nu} \phi(x) > 0 \quad (M^{*}S')$$

erfüllen muß.

Die dafür in Frage kommenden (einfachen) Funktionen sind ϕ_2 und ϕ_3 und die beiden Spezialfälle ϕ_4 und ϕ_5 . Damit diese Funktionen überhaupt als Testfunktionen anwendbar sind, muß, genau wie in den Kapiteln 5, 6 und 7,

$$E\Psi(\|\xi_{ix}\|) < \infty \quad (M^{**})$$

für $1 \leq i \leq d$ und alle $x \in \mathbb{S}_1$ gefordert werden. Diese Bedingung folgt bei ϕ_2, ϕ_3 mit $\alpha_n \leq 1$ und ϕ_4 schon aus $m_{ij}(x) < \infty$ für $1 \leq i, j \leq d$ und alle $x \in \mathbb{S}_1$, stellt aber für ϕ_3 mit $\alpha_n > 1$ und ϕ_5 eine wesentliche Restriktion dar.

Die Bedingung (M*S') ist, wie in den Beweisen der folgenden Sätze zu sehen, trivialerweise erfüllt; die Überprüfung der Bedingung (M*) wird durch die folgende Vorbemerkung sehr einfach.

Vorbemerkung 8.2.

Aus jeder der beiden Bedingungen

$$a) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-1} (w, V(x)) < 0$$

für ein $\beta \geq 0$ und ein $w \in \mathbb{R}^d$, $w \gg 1$.

$$b) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|M(x)\| < \infty$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-n} \left[\nabla F(x), V(x) \right] < 0$$

für ein $\beta \geq 0$ und eine Funktion F , die (F^*b) mit Homogenitätsgrad n erfüllt,

folgt

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-1} (x, \lambda(x)) > 0.$$

Beweis:

$$a) (w, V(x)) = (w, M^T(x) \Lambda(x) x) - (w, \Lambda(x) x)$$

$$0 > \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-1} (w, V(x)) \geq - \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-1} (w, \Lambda(x) x)$$

$$b) \|x\|^{\beta-n} \left[\nabla F(x), V(x) \right] = \|x\|^{\beta-1} (x, \lambda(x)) \left[\|x\|^{1-n} \nabla F(x), \tilde{V}(x) \right]$$

$$\|x\|^{1-n} \|\nabla F(x)\| \leq \delta_1$$

$$\tilde{V}(x) = (x, \lambda(x))^{-1} V(x) = (x, \lambda(x))^{-1} [M^T(x) - I] \Lambda(x) x$$

$$\|\tilde{V}(x)\|_1 \leq \|M^T(x) - I\|_1 \quad \square$$

Satz 8.3.

Es sei

$$E \log(1 + \|\xi_{ix}\|) < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$$C_{ix}^{(1)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S \text{ mit } \|x\| \text{ hinreichend groß.}$$

Falls für ein $w \in \mathbb{R}^d$ mit $w \gg 1$ und ein $\beta \geq 0$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-1} (w, V(x)) < 0$$

so gilt (M) mit $\nu = -\beta$.

Falls für ein $w \in \mathbb{R}^d$ mit $w \gg 1$ und ein $\beta \geq 0$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta} (w, \tilde{V}(x)) < 0$$

so gilt (MS) mit $\nu = -(1+\beta)$.

Beweis:

Testfunktion $\Phi_2(x) = \Psi_2((w, x))$

$$\|x\|^\beta (x, \lambda(x)) \log(w, x) \geq \|x\|^{\beta-1} (x, \lambda(x)) \|x\| \log\|x\|$$

$$\|x\|^{1+\beta} \log(w, x) \geq \|x\|^{1+\beta} \log\|x\|$$

Damit sind (M^*) und (M^*S') erfüllt.

Nach Ungleichung (3.4) von Satz 3.12 und Gleichung (3.6) von Satz 3.14 gilt:

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^\beta \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\log(w, x+y-e^i) - \log(w, x)] \leq$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^\beta (w, x)^{-1} (w, V(x)) \leq \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-1} (w, V(x))$$

Der Beweis für den zweiten Teil des Satzes ist praktisch identisch, wenn die obige Abschätzung mit $\|x\|(x, \lambda(x))^{-1}$ multipliziert wird. $\square$

Satz 8.4.

Es sei für ein α mit $0 < \alpha \leq 1$

$$C_{ix}^{(\alpha)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in \mathbb{S}_1,$$

$$C_{ix}^{(1)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in \mathbb{S} \text{ mit } \|x\| \text{ hinreichend groß.}$$

Falls für ein $w \in \mathbb{R}^d$ mit $w \gg 1$ und ein $\beta \geq 0$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-1} (w, V(x)) < 0$$

so gilt (M) mit $\nu = \alpha - \beta$.

Falls für ein $w \in \mathbb{R}^d$ mit $w \gg 1$ und ein $\beta \geq 0$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^\beta (w, \tilde{V}(x)) < 0$$

so gilt (MS) mit $\nu = \alpha - \beta - 1$.

Beweis:

Testfunktion $\Phi_3(x) = (w, x)^\alpha$, $F(x) = (w, x)$

$$\|x\|^{\beta-\alpha} (x, \lambda(x)) (w, x)^\alpha \geq \|x\|^{\beta-1} (x, \lambda(x)) \|x\|$$

$$\|x\|^{1+\beta-\alpha} (w, x)^\alpha \geq \|x\|^{1+\beta}$$

Damit sind (M^*) und (M^*S') erfüllt.

Nach Ungleichung (3.5) von Satz 3.13 und Gleichung (3.8) von Satz 3.14 gilt:

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-\alpha} \frac{d}{\sum_{i=1}^d} x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [(w, x+y-e^i)^\alpha - (w, x)^\alpha] \leq \\ \alpha \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-\alpha} (w, x)^{\alpha-1} (w, V(x)) \leq \alpha \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-1} (w, V(x))$$

Der Beweis für den zweiten Teil des Satzes ist völlig analog. $\square$

Satz 8.5.

Es sei für ein α mit $0 < \alpha \leq 1$

$$C_{ix}^{(2\alpha)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} C_{ix}^{(2)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d.$$

Falls für ein $\beta \geq 0$ und eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, die $(x, Bx) > 0$ für alle $x \in K_+$ erfüllt,

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-2} (Bx, V(x)) < 0$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-1} \|\lambda(x)\| = 0$$

so gilt (M) mit $\nu = 2\alpha - \beta$.

Falls für ein β mit $0 \leq \beta < 1$ und eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, die $(x, Bx) > 0$ für alle $x \in K_+$ erfüllt,

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-1} (Bx, \tilde{V}(x)) < 0$$

so gilt (MS) mit $\nu = 2\alpha - \beta - 1$.

Beweis:

Testfunktion $\Phi_3(x) = (x, Bx)^\alpha$, $F(x) = (x, Bx)$

$$\|x\|^{\beta-2\alpha} (x, \lambda(x)) (x, Bx)^\alpha \geq \delta \|x\|^{\beta-1} (x, \lambda(x)) \|x\|$$

$$\|x\|^{1+\beta-2\alpha} (x, Bx)^\alpha \geq \delta \|x\|^{1+\beta}$$

für ein $\delta > 0$.

Damit sind (M^*) und (MS') erfüllt.

$$D_x^{(2)} = \|x\|^{-1} (x, \lambda(x)) \tilde{D}_x^{(2)}$$

$$\tilde{D}_x^{(2)} \leq \max_{1 \leq i \leq d} C_{ix}^{(2)}$$

Nach Ungleichung (3.5) von Satz 3.13 und Ungleichung (3.7) von Satz 3.15 gilt:

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [(x+y-e^i, B(x+y-e^i))^\alpha - (x, Bx)^\alpha] \leq$$

$$\alpha(x, Bx)^{\alpha-1} [2(Bx, V(x)) + \|x\| \|B\| D_x^{(2)}] \leq$$

$$2\alpha \|x\|^{2\alpha-2} (Bx, V(x)) + \alpha \|x\|^{2\alpha-1} \|B\| D_x^{(2)}$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-2\alpha} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x)$$

$$\sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [(x+y-e^i, B(x+y-e^i))^\alpha - (x, Bx)^\alpha] \leq$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left\{ 2\alpha \|x\|^{\beta-2} (Bx, V(x)) + \alpha \|x\|^{\beta-1} \|B\| D_x^{(2)} \right\} \leq$$

$$2\alpha \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-2} (Bx, V(x)) +$$

$$\alpha \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-2} (x, \lambda(x)) \|B\| \tilde{D}_x^{(2)}$$

Der Beweis für den zweiten Teil des Satzes ist praktisch identisch, wenn die obige Abschätzung mit $\|x\|(x, \lambda(x))^{-1}$ multipliziert wird. $\square$

Satz 8.6.

Es sei für ein $\alpha > 1$ und $\alpha' := \min(1, \alpha-1)$

$$\mathbb{E} \log(1 + \|\xi_{ix}\|) < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in \mathbb{S}_1,$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} C_{ix}^{(\alpha)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d.$$

Falls für ein $\beta \geq 0$ und eine Funktion F , die $(F*b)$ erfüllt,

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-n} \{ \nabla F(x), V(x) \} < 0$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-\alpha'} \|\lambda(x)\| = 0$$

so gilt (M) mit $\nu = -\beta$.

Falls für ein β mit $0 \leq \beta < \alpha'$ und eine Funktion F , die $(F*b)$ erfüllt,

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-n+1} [\nabla F(x), \tilde{V}(x)] < 0$$

so gilt (MS) mit $\nu = -(1+\beta)$.

Beweis:

Testfunktion $\phi_2(x) = \Psi_2(F(x))$

$$\|x\|^\beta (x, \lambda(x)) \log F(x) \geq \|x\|^{\beta-1} (x, \lambda(x)) \|x\| \log \|x\|$$

$$\|x\|^{1+\beta} \log F(x) \geq \|x\|^{1+\beta} \log \|x\|$$

Damit sind (M^*') und (M^*S') erfüllt.

$$D_x^{(\alpha)} = \|x\|^{-1} (x, \lambda(x)) \tilde{D}_x^{(\alpha)}$$

$$\tilde{D}_x^{(\alpha)} \leq \max_{1 \leq i \leq d} C_{ix}^{(\alpha)}$$

Nach den Ungleichungen (3.2a), (3.2b) und (3.2c) von Satz 3.6 gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\phi_2(x+y-e^i) - \phi_2(x)] \leq \\ & \frac{[\nabla F(x), V(x)]}{F(x)} + \begin{cases} O(\|x\|^{1-\alpha}) D_x^{(\alpha)} & \text{falls } \alpha < 2 \\ O(\|x\|^{-1}) D_x^{(2)} & \text{falls } \alpha = 2 \\ O(\|x\|^{-1}) D_x^{(2)} + O(\|x\|^{1-\alpha}) D_x^{(\alpha)} & \text{falls } \alpha > 2 \end{cases} \\ & \leq \|x\|^{-n} [\nabla F(x), V(x)] + O(\|x\|^{-\alpha'}) D_x^{(\alpha)} \end{aligned}$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^\beta \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\phi_2(x+y-e^i) - \phi_2(x)] \leq$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left\{ \|x\|^{\beta-n} [\nabla F(x), V(x)] + O(\|x\|^{\beta-\alpha'}) D_x^{(\alpha)} \right\} \leq$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-n} [\nabla F(x), V(x)] +$$

$$O(1) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-\alpha'-1} (x, \lambda(x)) \tilde{D}_x^{(\alpha)}$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta+1} \sum_{i=1}^d \frac{x_i \lambda_i(x)}{(x, \lambda(x))} \sum_{y \in \mathbb{S}} p_y^i(x) [\phi_2(x+y-e^i) - \phi_2(x)] \leq$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left\{ \|x\|^{\beta-n+1} [\nabla F(x), \tilde{V}(x)] + O(\|x\|^{\beta-\alpha'}) \tilde{D}_x^{(\alpha)} \right\} \leq$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{B-n+1} \left[\nabla F(x), \tilde{V}(x) \right] +$$

$$O(1) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{B-\alpha'} \tilde{D}_x^{(\alpha)} \quad \square$$

Satz 8.7.

Es sei für ein $n > 0$, ein $\alpha > \max(1, n)$ und $\alpha' := \min(1, \alpha-1)$

$$C_{ix}^{(n)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d \text{ und alle } x \in S_1,$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} C_{ix}^{(\alpha)} < \infty \text{ für } 1 \leq i \leq d.$$

Falls für ein $\beta \geq 0$ und eine Funktion F , die $(F*b)$ mit dem Homogenitätsgrad n erfüllt,

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{B-n} \left[\nabla F(x), V(x) \right] < 0$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{B-\alpha'} \|(x, \lambda(x))\| = 0$$

so gilt (M) mit $\nu = n-\beta$.

Falls für ein β mit $0 \leq \beta < \alpha'$ und eine Funktion F , die $(F*b)$ mit dem Homogenitätsgrad n erfüllt,

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{B-n+1} \left[\nabla F(x), \tilde{V}(x) \right] < 0$$

so gilt (MS) mit $\nu = n-\beta-1$.

Beweis:

Testfunktion $\phi_3(x) = F(x)$

$$\|x\|^{B-n} (x, \lambda(x)) F(x) \geq \|x\|^{B-1} (x, \lambda(x)) \|x\|$$

$$\|x\|^{1+\beta-n} F(x) \geq \|x\|^{1+\beta}$$

Damit sind (M^*) und (MS') erfüllt.

Nach den Ungleichungen (3.3a) bis (3.3e) von Satz 3.8 gilt (analog zum Beweis von Satz 8.6):

$$\sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [F(x+y-e^i) - F(x)] \leq$$

$$\left[\nabla F(x), V(x) \right] + \|x\|^n O(\|x\|^{-\alpha'}) D_x^{(\alpha)}$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{B-n} \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i(x) \sum_{y \in S} p_y^i(x) [F(x+y-e^i) - F(x)] \leq$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left\{ \|x\|^{\beta-n} \left[\nabla F(x), V(x) \right] + O(\|x\|^{\beta-\alpha'}) D_x^{(\alpha)} \right\} \leq$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-n} \left[\nabla F(x), V(x) \right] +$$

$$O(1) \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{\beta-\alpha'-1} (x, \lambda(x)) \tilde{D}_x^{(\alpha)}$$

Der Beweis für den zweiten Teil des Satzes ist völlig analog. $\square$

Anmerkung 8.8.

Die Resultate der Sätze 8.3 und 8.4 sind auch als Spezialfälle der Sätze 8.6 und 8.7 unter etwas stärkeren Momentenbedingungen zu erhalten.

Die Resultate von Satz 8.5 für $0 < \alpha < 1$ sind Spezialfälle von Satz 8.7; nur für $\alpha = 1$ sind dort die Momentenbedingungen schwächer als im allgemeinen Satz.

9. "Einfache" Kriterien

Die Bedingungen für Transienz, Rekurrenz, Ergodizität bis hin zu denen für die Existenz von Momenten der stationären Maße in den Kapiteln 4 bis 8 enthalten als gemeinsamen Teil

"Falls ... eine Funktion F existiert, die (F^*) erfüllt ...",

wobei die beiden Spezialfälle $F(x) = (w, x)$ und $F(x) = (x, Bx)$ teilweise gesondert untersucht werden.

Als erstes stellt sich natürlich die Frage, gibt es an Stelle dieser komplizierten Bedingungen keine einfachen Eigenwertbedingungen zur Klassifikation der Prozesse, analog zu der Eigenwertbedingung bei den nicht-populationsabhängigen Prozessen. Da diese Frage aufgrund der Untersuchungen in Abschnitt 9.1 mit "nein" beantwortet werden muß, bleibt als nächstes das Problem, unter welchen Voraussetzungen solche Funktionen F existieren. Für lineare und quadratische Potentialfunktionen lassen sich dafür Bedingungen durch die Untersuchung von

$$(w, V(x)) \quad \text{bzw.} \quad (Bx, V(x))$$

finden.

9.1. Gibt es einfache Eigenwertbedingungen?

Bei den konventionellen, d.h. nicht populationsabhängigen Markoffschen Verzweigungsprozessen wird das Verhalten entscheidend durch $\lambda(m-1)$, die mittlere Zuwachsrates pro Individuum (eindimensionaler Fall) bzw. durch $\rho(\Lambda[M-I])$, den Eigenwert mit dem größten Realteil des infinitesimalen Generators der Erwartungswertmatrix, bestimmt. In beiden Fällen stellt die angegebene Größe den Malthusparameter des Prozesses dar. Diese starke Analogie läßt vermuten, daß auch eine ähnliche, wenn auch schwächere Beziehung zwischen $\lambda(k)[m_k-1]$ und $\rho(\Lambda(x)[M(x)-I])$, den entsprechenden Größen der populationsabhängigen Prozesse bestehen könnte. Als Beispiele sind die Analoga zu den einfachsten Bedingungen für Transienz und Ergodizität im eindimensionalen Fall aufgeführt, die für das entsprechende Verhalten der mehrdimensionalen Prozesse eigentlich hinreichend sein sollten.

Für Transienz:

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \rho(\Lambda(x)[M(x)-I]) > 0$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^\varphi < \infty$$

für eine geeignete Funktion φ .

Für Ergodizität:

$$\|M(x)\| < \infty \quad \text{für alle } x$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \rho(\Lambda(x)[M(x)-I]) < 0$$

und eventuell noch

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} D_x^\varphi < \infty$$

für eine geeignete Funktion φ .

Anhand von zwei Beispielen läßt sich aber zeigen, daß so einfache Kriterien für Transienz, Rekurrenz oder Ergodizität bei mehrdimensionalen Prozessen nicht existieren können. $\rho(\Lambda(x)[M(x)-I])$ allein liefert praktisch keine Information über das Verhalten eines Prozesses.

Beispiel 9.1.

Es seien $d = 2$ und $c \in \mathbb{N}$ gerade.

Die Sterberaten und Nachkommensverteilungen eines Prozesses $\{Z(t)\}$ seien folgendermaßen definiert (der Prozeß werde nur auf S_2 betrachtet):

$$\lambda_1(x) := \lambda_2(x) := 1 \quad \text{für alle } x.$$

$$(A) \quad \|x\|_1 = 2$$

$$f^1(s, x) := s_2^c, \quad f^2(s, x) := s_1^c$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}, \quad V(x) = \begin{bmatrix} cx_2 - x_1 \\ cx_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$\rho(\Lambda(x)[M(x)-I]) = c-1$$

(B) $\|x\|_1 > 2$ und gerade

$$f^1(s, x) := s_2^c, \quad f^2(s, x) := 1$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ cx_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$p(\Lambda(x)[M(x)-I]) = -1$$

(C) $\|x\|_1 > 2$ und ungerade

$$f^1(s, x) := 1, \quad f^2(s, x) := s_1^c$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \quad V(x) = \begin{bmatrix} cx_2 - x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$$p(\Lambda(x)[M(x)-I]) = -1$$

Dieser Prozeß erfüllt die oben angegebene Ergodizitätsbedingung.

Beispiel 9.2.

Es seien $d = 2$ und $a > 0$.

Die Sterberaten und Nachkommensverteilungen eines Prozesses $\{Z(t)\}$ seien folgendermaßen definiert (der Prozeß werde nur auf S_2 betrachtet):

(A) $\|x\|_1 = 2$

$$\lambda_1(x) := 1, \quad \lambda_2(x) := 1$$

$$f^1(s, x) := \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} s_1 s_2, \quad f^2(s, x) := \frac{1}{2} s_2^2 + \frac{1}{2} s_1 s_2$$

$$M(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad V(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$p(\Lambda(x)[M(x)-I]) = 1$$

(B) $\|x\|_1 > 2$ und gerade

$$\lambda_1(x) := 1, \quad \lambda_2(x) := a$$

$$f^1(s, x) := \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} s_1 s_2, \quad f^2(s, x) := 1$$

$$M(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 - 2ax_2 \end{bmatrix}$$

$$p(\Lambda(x)[M(x)-I]) = \frac{1}{2}$$

(C) $\|x\|_1 > 2$ und ungerade

$$\lambda_1(x) := a \quad , \quad \lambda_2(x) := 1$$

$$f^1(s, x) := 1 \quad , \quad f^2(s, x) := \frac{1}{2} s_2^2 + \frac{1}{2} s_1 s_2$$

$$M(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad V(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_2^{-2ax_1} \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$p(\Lambda(x)[M(x)-I]) = \frac{1}{2}$$

Dieser Prozeß erfüllt die oben angegebene Transienzbedingung.

Beide Beispiele sind sehr ähnlich aufgebaut. Die Bedingung (A) garantiert, daß die Prozesse nicht aussterben (Start mit $\|x\|_1 \geq 2$). Die Bedingungen (B) und (C) enthalten für jeden Prozeß einen freien Parameter und sind in gewisser Weise symmetrisch. Die Entwicklung der Prozesse hängt, wenn mindestens drei Objekte vorhanden sind, nur von der Parität der Gesamtpopulationen ab. Dieses Verhalten zusammen mit den extrem gewählten Nachkommensverteilungen führt zu einem Verhalten, das den obigen Überlegungen widerspricht.

Die Driftraten $V(x)$ für $x_1=0$ bzw. $x_2=0$ und $\|x\|_1$ hinreichend groß zeigen, daß sich die mit Hilfe der Testfunktionen $\Phi(x) = \Psi(F(x))$ entwickelten Kriterien nicht anwenden lassen. Eine direkte Anwendung der in Anhang 0 angegebenen Kriterien scheitert daran, daß ich keine geeignete Testfunktion gefunden habe. Betrachten wir dagegen beim Sprungprozeß nur jeden zweiten Sprung, d.h. den Prozeß $\{X_{2n}\}$, so ist das alternierende Verhalten durch "Mittelung" fast verschwunden. Zur Untersuchung dieser Prozesse gibt es einfache Testfunktionen, zu deren Auswertung werden die folgenden Größen definiert:

$$\Xi_{X_0}^i := x_i - x_0 \quad \text{für } i=1,2$$

Veränderung des Sprungprozesses bei i Sprüngen.

$$R_x^i(y) := P(\Xi_x^i = y) \quad \text{für } i=1,2, x \in S_2, y \in \mathbb{Z}^2$$

Das Verhalten der Prozesse $\{X_{2n}\}$ läßt sich mit geeigneten Testfunktionen Φ durch Auswertung von

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^2} R_x^2(y) [\Phi(x+y) - \Phi(x)]$$

untersuchen.

Satz 9.3.

Der durch Beispiel 9.1 definierte Prozeß ist transient für $c \geq 4$, was der oben angegebenen Ergodizitätsbedingung widerspricht.

Beweis:

Die folgende Tabelle gibt $R_x^1(y)$, die Verteilungsfunktion von Ξ_x^1 , für $x \in S_3$ an.

y	$\ x\ _1$ gerade	$\ x\ _1$ ungerade
(-1,0)	0	$\frac{x_1}{x_1+x_2}$
(0,-1)	$\frac{x_2}{x_1+x_2}$	0
(-1,c)	$\frac{x_1}{x_1+x_2}$	0
(c,-1)	0	$\frac{x_2}{x_1+x_2}$

Aus der obigen Tabelle erhält man dann $R_x^2(y)$, die Verteilungsfunktion von Ξ_x^2 , für $x \in S_4$.

y	$\ x\ _1$ gerade	$\ x\ _1$ ungerade
(-1,-1)	$\frac{x_2}{x_1+x_2} \frac{x_1}{x_1+x_2-1}$	$\frac{x_1}{x_1+x_2} \frac{x_2}{x_1+x_2-1}$
(-2,c)	$\frac{x_1}{x_1+x_2} \frac{x_1-1}{x_1+x_2-1+c}$	$\frac{x_2}{x_1+x_2} \frac{x_2-1}{x_1+x_2-1}$
(c,-2)	$\frac{x_2}{x_1+x_2} \frac{x_2-1}{x_1+x_2-1}$	$\frac{x_2}{x_1+x_2} \frac{x_2-1}{x_1+x_2-1+c}$
(c-1,c-1)	$\frac{x_1}{x_1+x_2} \frac{x_2+c}{x_1+x_2-1+c}$	$\frac{x_2}{x_1+x_2} \frac{x_1+c}{x_1+x_2-1+c}$

In beiden Fällen gilt $R_x^2((-1,-1)) < R_x^2((c-1,c-1))!$

Mit $\phi(x) = \frac{1}{\log \|x\|_1}$ erhält man für $x \in S_4$:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \mathbb{Z}^2} R_x^2(y) [\phi(x+y) - \phi(x)] = \\ R_x^2((-1, -1)) \left[\frac{1}{\log(\|x\|_1 - 2)} - \frac{1}{\log \|x\|_1} \right] \\ + [R_x^2((-2, 0)) + R_x^2((0, -2))] \left[\frac{1}{\log(\|x\|_1 + c - 2)} - \frac{1}{\log \|x\|_1} \right] \\ + R_x^2((c-1, c-1)) \left[\frac{1}{\log(\|x\|_1 + 2c - 2)} - \frac{1}{\log \|x\|_1} \right] < \\ R_x^2((-1, -1)) \left[\frac{1}{\log(\|x\|_1 - 2)} - \frac{2}{\log \|x\|_1} + \frac{1}{\log(\|x\|_1 + 2c - 2)} \right] \end{aligned}$$

Für t hinreichend groß und $c > 2$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log(t-2)} - \frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log(t+2c-2)} - \frac{1}{\log t} = \\ - \frac{\log(t-2) - \log t}{\log t \log(t-2)} - \frac{\log(t+2c-2) - \log t}{\log t \log(t+2c-2)} = \\ - \frac{\log(1 - \frac{2}{t})}{\log t \log(t-2)} - \frac{\log(1 + \frac{2c-2}{t})}{\log t \log(t+2c-2)} = \\ - \frac{\frac{2}{t} + o(t^{-1})}{\log^2 t} [1 + o(1)] - \frac{\frac{2c-2}{t} + o(t^{-1})}{\log^2 t} [1 + o(1)] = \\ - \frac{2(c-2)}{t \log^2 t} + o\left[\frac{1}{t \log^2 t}\right] < 0 \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^2} R_x^2(y) [\phi(x+y) - \phi(x)] < 0$$

für alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß.

Nach Satz A0.4 ist somit der Prozeß $\{X_{2n}\}$ transient. Daraus folgt dann, daß auch $\{X_n\}$ und $\{Z(t)\}$ transient sind. $\square$

Satz 9.4.

Der durch Beispiel 9.2 definierte Prozeß ist ergodisch für $a > 1$, was der oben angegebenen Transienzbedingung widerspricht.

Beweis:

Die folgende Tabelle gibt $R_x^1(y)$, die Verteilungsfunktion von Ξ_x^1 , für $x \in S_3$ an.

y	$\ x\ _1$ gerade	$\ x\ _1$ ungerade
(-1,0)	0	$\frac{ax_1}{ax_1+x_2}$
(0,-1)	$\frac{ax_2}{x_1+ax_2}$	0
(0,1)	$\frac{1}{2} \frac{x_1}{x_1+ax_2}$	$\frac{1}{2} \frac{x_2}{ax_1+x_2}$
(1,0)	$\frac{1}{2} \frac{x_1}{x_1+ax_2}$	$\frac{1}{2} \frac{x_2}{ax_1+x_2}$

Aus der obigen Tabelle erhält man dann $R_x^2(y)$, die Verteilungsfunktion von Ξ_x^2 , für $x \in S_4$.

y	$\ x\ _1$ gerade	$\ x\ _1$ ungerade
(-1,-1)	$\frac{ax_2}{x_1+ax_2} \frac{ax_1}{ax_1+x_2-1}$	$\frac{ax_1}{ax_1+x_2} \frac{ax_2}{x_1+ax_2-1}$
(-1,1)	$\frac{1}{2} \frac{x_1}{x_1+ax_2} \frac{ax_1}{ax_1+x_2+1}$	$\frac{1}{2} \frac{ax_1}{ax_1+x_2} \frac{x_1-1}{x_1+ax_2-1}$
(1,-1)	$\frac{1}{2} \frac{ax_2}{x_1+ax_2} \frac{x_2-1}{ax_1+x_2-1}$	$\frac{1}{2} \frac{x_2}{ax_1+x_2} \frac{ax_2}{x_1+ax_2-1}$
(0,0)	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{x_1}{x_1+ax_2} \frac{ax_1+a}{ax_1+x_2+a} \\ + \frac{1}{2} \frac{ax_2}{x_1+ax_2} \frac{x_2-1}{ax_1+x_2-1} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{x_2}{ax_1+x_2} \frac{ax_2+a}{x_1+ax_2+a} \\ + \frac{1}{2} \frac{ax_1}{ax_1+x_2} \frac{x_1-1}{x_1+ax_2-1} \end{array} \right.$
(1,1)	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \frac{x_1}{x_1+ax_2} \frac{x_2}{ax_1+x_2+a} \\ + \frac{1}{4} \frac{x_1}{x_1+ax_2} \frac{x_2+1}{ax_1+x_2+1} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \frac{x_2}{ax_1+x_2} \frac{x_1}{x_1+ax_2+a} \\ + \frac{1}{4} \frac{x_2}{ax_1+x_2} \frac{x_1+1}{x_1+ax_2+1} \end{array} \right.$
(0,2)	$\frac{1}{4} \frac{x_1}{x_1+ax_2} \frac{x_2+1}{ax_1+x_2+1}$	$\frac{1}{4} \frac{x_2}{ax_1+x_2} \frac{x_1}{x_1+ax_2+a}$
(2,0)	$\frac{1}{4} \frac{x_1}{x_1+ax_2} \frac{x_2}{ax_1+x_2+a}$	$\frac{1}{4} \frac{x_2}{ax_1+x_2} \frac{x_1+1}{x_1+ax_2+1}$

Mit $\phi(x) = \|x\|_2^2$ erhält man für $x \in \mathbf{S}_4$ und $\|x\|_1$ gerade:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \mathbf{Z}^2} R_x^2(y) [\phi(x+y) - \phi(x)] &= \\ \sum_{y \in \mathbf{Z}^2} R_x^2(y) [2x_1y_1 + 2x_2y_2 + y_1^2 + y_2^2] &= \\ \frac{1}{x_1+ax_2} \left\{ 2 \frac{a^2x_1x_2[1-x_1-x_2]}{ax_1+x_2-1} + \frac{ax_1^2[1-x_1+x_2]}{ax_1+x_2+1} \right. \\ &+ \frac{ax_2(x_2-1)[1+x_1-x_2]}{ax_1+x_2-1} + \frac{1}{2} \frac{x_1x_2[1+x_1+x_2]}{ax_1+x_2+a} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{x_1(x_2+1)[1+x_1+x_2]}{ax_1+x_2+1} + \frac{x_1(x_2+1)[1+x_2]}{ax_1+x_2+1} \\ &\left. + \frac{x_1x_2[1+x_1]}{ax_1+x_2+a} \right\} =: \frac{B(x)}{x_1+ax_2} \end{aligned}$$

$B(x)$ hat die Form

$$B(x) = \frac{L_1(x)}{N(x)-1} + \frac{L_2(x)}{N(x)+1} + \frac{L_3(x)}{N(x)+a}$$

wobei

$$\begin{aligned} L_1(x) &:= -2a^2x_1^2x_2 - (2a^2-a)x_1x_2^2 - ax_2^3 \\ &+ (2a^2-a)x_1x_2 + 2ax_2^2 - ax_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &:= -ax_1^3 + (a+\frac{1}{2})x_1^2x_2 + \frac{3}{2}x_1x_2^2 \\ &+ (a-\frac{1}{2})x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1 \end{aligned}$$

$$L_3(x) := \frac{3}{2}x_1^2x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2^2 + \frac{3}{2}x_1x_2$$

$$N(x) := ax_1 + x_2$$

Durch elementare Umformungen erhält man:

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{N^2(x) [L_1(x) + L_2(x) + L_3(x)]}{[N(x)-1][N(x)+1][N(x)+a]} + O(\|x\|_1) = \\ &= \frac{N^2(x) B'(x)}{[N(x)-1][N(x)+1][N(x)+a]} + O(\|x\|_1) \end{aligned}$$

Wobei

$$B'(x) := ax_1^3 + (2a^2 - a - 2)x_1^2x_2 + (2a^2 - a - 2)x_1x_2^2 + ax_2^3$$

$$a' := \inf \{ B'(x) : x \in {}_1K_+ \}$$

Aus Symmetriegründen wird das Infimum entweder in den Randpunkten $(1,0)$ und $(0,1)$ oder in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ angenommen.

$$B'((1,0)) = a = B'((0,1))$$

$$B'((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = \frac{1}{2}(a^2 - 1)$$

$$a' = \min \{ a, \frac{1}{2}(a^2 - 1) \} > 0 \quad \text{falls } a > 1$$

Damit gilt dann für $x \in \mathbb{S}_4$ und $\|x\|_1$ gerade:

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{y \in \mathbb{Z}^2}} R_x^2(y) [\Phi(x+y) - \Phi(x)] &\leq \\ - \frac{a' (ax_1 + x_2)^2 (x_1 + x_2)^3}{(x_1 + ax_2)(ax_1 + x_2 - 1)(ax_1 + x_2 + 1)(ax_1 + x_2 + a)} + O(1) &= \\ - a'' \|x\|_1 + O(1) \end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante $a'' > 0$ falls $a > 1$.

Mit praktisch identischer Rechnung erhält man für $x \in \mathbb{S}_4$ und $\|x\|_1$ ungerade ebenfalls

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{y \in \mathbb{Z}^2}} R_x^2(y) [\Phi(x+y) - \Phi(x)] &\leq \\ - a'' \|x\|_1 + O(1) . \end{aligned}$$

Damit ist aufgrund von Satz A0.6 gezeigt, daß der Prozeß $\{X_{2n}\}$ ergodisch ist. Der Prozeß $\{X_n\}$ ist dann ebenfalls ergodisch, und nach Vorbemerkung 8.0 gilt dies dann auch für $\{Z(t)\}$. $\square$

9.2. Geometrische Interpretation

Das qualitative Verhalten der Prozesse $\{Z(t)\}$ und $\{X_n\}$ ist im wesentlichen durch die Größen $\|x\|^{-n}(\nabla F(x), V(x))$ bzw. $\|x\|^{1-n}(\nabla F(x), V(x))$ für $\|x\|$ hinreichend groß bestimmt. Dabei ist $V(x) = [M^T(x) - I] \Lambda(x)x$ die mittlere Driftrate des Prozesses $\{Z(t)\}$ und $\tilde{V}(x) = (x, \lambda(x))^{-1} V(x)$ die mittlere Drift des Sprungprozesses $\{X_n\}$, jeweils im Zustand $x \in S_1$. Die eindimensionalen Analoga dieser Größen sind $k\lambda(k)[m_k - 1]$ bzw. $[m_k - 1]$, wobei sich im letzteren Fall der Faktor $k\lambda(k)$ herauskürzt.

$(\nabla F(x), V(x))$ bzw. $(\nabla F(x), \tilde{V}(x))$ lassen sich als Projektion der mittleren Driftrate bzw. Drift auf das durch die Potentialfunktion F gegebene Gradientenfeld interpretieren: die beiden Skalarprodukte unterscheiden sich nur um einen positiven Faktor, sodaß die qualitativen Überlegungen dieses Abschnitts für beide gelten.

Eine notwendige Voraussetzung für die Transienzbedingungen von Kapitel 4 ist

$$\{\nabla F(x), V(x)\} > 0 \quad (1)$$

für alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß, wobei die Funktion F die Bedingung (F^*a) erfüllen muß (die Bedingung 7a aus Abschnitt 1.4 wird explizit in Lemma A2.7 zum Beweis von Satz 3.5 benötigt). Für festes $x \in S_1$ bedeutet Ungleichung (1), daß die Driftrate in das Innere des unbeschränkten konvexen Gebietes $\{z \in G_{\mathcal{D}(F)} : F(z) \geq F(x)\}$ zeigt. In Abbildung 9.5 ist für $d=2$ je eine Aquipotentiallinie der zwei einfachsten Typen von Potentialfunktionen, die (F^*a) erfüllen, dargestellt, nämlich für $F_0(x) = (w, x)$ und $F_1(x) = (x, B_1 x)$. $w \in \mathbb{R}_+^2$ und $B_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sind entsprechend den Beispielen 1.4.1.a und 1.4.1.b1 gewählt.

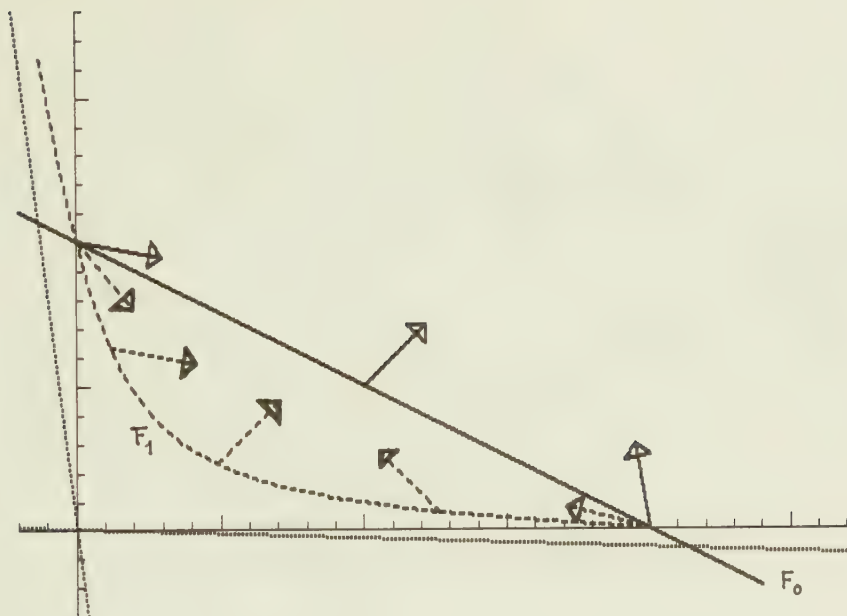


Abbildung 9.5.

Äquipotentiallinie für F_0 mit drei Driftraten, sodaß (1) gilt.
 Äquipotentiallinie für F_1 mit Asymptoten und fünf Driftraten, sodaß (1) gilt.

Eine notwendige Voraussetzung für die Ergodizitäts- und Momentenbedingungen der Kapitel 6 bis 8 ist

$$\{\nabla F(x), V(x)\} < 0 \quad (2)$$

für alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß, wobei die Funktion F die Bedingung (F^*b) erfüllen soll (die Bedingung 7b aus Abschnitt 1.4 wird nicht explizit benötigt). Für festes $x \in S_1$ bedeutet Ungleichung (2), daß die Driftrate in das Innere des beschränkten und aufgrund der oben erwähnten Bedingung 7b konvexen Gebietes $\{z \in G_\delta(F) : F(z) \leq F(x)\}$ zeigt. In Abbildung 9.6 ist für $d=2$ je eine Äquipotentiallinie der zwei einfachsten Typen von Potentialfunktionen, die (F^*b) erfüllen, dargestellt, nämlich für $F_0(x) = (w, x)$ und $F_2(x) = (x, B_2 x)$. $w \in \mathbb{R}_+^2$ und $B_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sind entsprechend den Beispielen 1.4.1.a und 1.4.1.b2 gewählt.

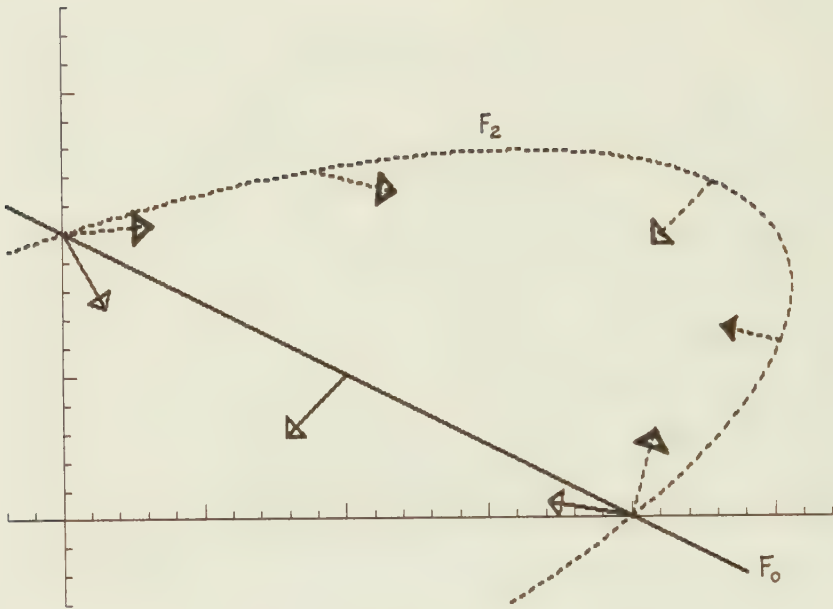


Abbildung 9.6.

Aquipotentiallinie für F_0 mit drei Driftraten, sodaß (2) gilt.
 Aquipotentiallinie für F_2 mit fünf Driftraten, sodaß (2) gilt.

Die beiden Abbildungen verdeutlichen, warum es sinnvoll ist, die Kombinationen Ungleichung (1) und Bedingung (F^*a) bzw. Ungleichung (2) und Bedingung (F^*b) zu wählen.

9.3. Untersuchung von $(w, \tilde{V}(x))$

In diesem Abschnitt soll jetzt versucht werden, unter Konvergenz-
 voraussetzungen an die Erwartungswertmatrizen $M(x)$ doch noch ein-
 einfache algebraische Bedingungen zur Klassifikation der Prozesse zu
 finden.

Satz 9.7.

Es sei $M_* := \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} M(x)$.

Falls ein $w \in \mathbb{R}_+^d$, $w \gg 0$, existiert, sodaß $M_* w \gg w$, dann gilt auch

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} (w, \tilde{V}(x)) > 0. \quad (3)$$

Beweis

$$\tilde{V}(x) = [M^T(x) - I] (x, \lambda(x))^{-1} \Lambda(x)x$$

Daher gilt:

$$(w, \tilde{V}(x)) \geq \inf_{y \in {}_1K_+} ([M(x) - I]w, y)$$

$$([M(x) - I]w, y) = ([M_* - I]w, y) + ([M(x) - M_*]w, y)$$

$$\inf_{y \in {}_1K_+} ([M_* - I]w, y) > 0$$

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} ([M(x) - M_*]w, y) \geq 0$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt dann die Behauptung des Satzes. $\square$

Satz 9.8.

Es gelte $M(x) \leq M_*$ für ein $M_* \in \mathbb{R}_+^{d \times d}$ und alle $x \in \mathbb{S}_N$ für ein $N \in \mathbb{N}$.

Falls ein $w \in \mathbb{R}_+^d$, $w \gg 0$, existiert, sodaß $M_* w \leq w$, dann gilt auch für alle $x \in \mathbb{S}_N$

$$(w, \tilde{V}(x)) \leq 0. \quad (4)$$

Beweis

$$(w, \tilde{V}(x)) \leq \sup_{y \in {}_1K_+} ([M(x) - I]w, y)$$

$$([M(x) - I]w, y) = \left\{ [M_* - I]w, y \right\} + \left\{ [M(x) - M_*]w, y \right\} \leq$$

$$\left\{ [M_* - I]w, y \right\} \leq 0 \quad \square$$

Satz 9.9.

Es sei $M_* := \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} M(x)$.

Falls ein $w \in \mathbb{R}_+^d$, $w \gg 0$, existiert, sodaß $M_* w \ll w$, dann gilt auch

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} (w, \tilde{V}(x)) < 0. \quad (5)$$

Beweis

$$(w, \tilde{V}(x)) \leq \sup_{y \in {}_1K_+} ([M(x) - I]w, y)$$

$$([M(x) - I]w, y) = [M_* - I]w, y + [M(x) - M_*]w, y$$

$$\sup_{y \in {}_1K_+} [M_* - I]w, y < 0$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} [M(x) - M_*]w, y \leq 0$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt dann die Behauptung des Satzes. $\square$

Korollar 9.10.

Die Matrix M_* in den Sätzen 9.7 bis 9.9 sei jeweils irreduzibel.

Aus $\rho(M_*) > 1$ folgt dann (3),

aus $\rho(M_*) = 1$ folgt dann (4) und

aus $\rho(M_*) < 1$ folgt dann (5),

jeweils mit w als Eigenvektor zu $\rho(M_*)$.

9.4. Untersuchung von $(w, V(x))$

In diesem Abschnitt soll jetzt versucht werden, unter Konvergenz-voraussetzungen an $\Lambda(x)[M(x)-I]$ analoge Aussagen zu erhalten, wie sie im vorhergehenden Abschnitt aufgeführt sind.

Satz 9.11.

Es sei $B_* := \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \Lambda(x)[M(x)-I]$.

Falls ein $w \in \mathbb{R}_+^d$, $w \gg 0$, existiert, sodaß $B_* w \gg 0$, dann gilt auch

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-1} (w, V(x)) > 0. \quad (6)$$

Satz 9.12.

Es gelte $\Lambda(x)[M(x)-I] \leq B_*$ für ein $B_* \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit $B_* + \delta I > 0$ für ein $\delta > 0$, und alle $x \in S_N$ für ein $N \in \mathbb{N}$.

Falls ein $w \in \mathbb{R}_+^d$, $w \gg 0$, existiert, sodaß $B_* w \leq 0$, dann gilt auch für alle $x \in S_N$

$$(w, V(x)) \leq 0. \quad (7)$$

Satz 9.13.

Es sei $B_* := \limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \Lambda(x)[M(x)-I]$.

Falls ein $w \in \mathbb{R}_+^d$, $w \gg 0$, existiert, sodaß $B_* w \ll 0$, dann gilt auch

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-1} (w, V(x)) < 0. \quad (8)$$

Die Beweise dieser drei Sätze sind praktisch identisch mit denen der Sätze 9.7 bis 9.9, wenn dort die folgenden Beziehungen verwendet werden.

$$\|x\|^{-1} V(x) = [M^T(x)-I] \Lambda(x) \|x\|^{-1} x$$

$$\inf_{y \in K_+} (\Lambda(x)[M(x)-I]w, y) \leq \|x\|^{-1} (w, V(x)) \leq \sup_{y \in K_+} (\Lambda(x)[M(x)-I]w, y)$$

Korollar 9.14.

Die Matrix B_* in den Sätzen 9.11 bis 9.13 sei jeweils irreduzibel.

Aus $\rho(B_*) > 0$ folgt dann (6),

aus $\rho(B_*) = 0$ folgt dann (7) und

aus $\rho(B_*) < 0$ folgt dann (8),

jeweils mit w als Eigenvektor zu $\rho(B_*)$.

9.5. Untersuchung von $(Bx, V(x))$

In diesem Abschnitt werden als letztes noch Eigenwertbedingungen für die Gültigkeit von (2) mit $F(x) = (x, Bx)$ unter Normalitätsbedingungen angegeben.

Vorbemerkung 9.15.

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ heißt normal, wenn $A^T A = A A^T$ gilt. Dies wiederum ist äquivalent mit der Darstellungsmöglichkeit

$$A = U^T D U,$$

wobei U eine orthogonale Matrix und D eine Diagonalmatrix (im allgemeinen mit komplexer Diagonale) ist. Aufgrund dieser Darstellung gilt

$$A + A^T = U^T D U + U^T \bar{D} U = U^T (D + \bar{D}) U,$$

wobei $D + \bar{D}$ eine reelle Diagonalmatrix ist.
(siehe z.B. Bellman, 1970, S.204)

Satz 9.16.

a) Für alle $x \in \mathbb{S}$ mit $\|x\|$ hinreichend groß sei $\Lambda(x)[M(x) - I]$ normal.
Unter der Eigenwertbedingung

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \rho(\Lambda(x)[M(x) - I]) < 0$$

gilt dann

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-2} (x, V(x)) < 0.$$

- b) Für alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß sei $\Lambda(x) = \Lambda_*$ und $\Lambda_* M(x) \Lambda_*^{-1}$ sei normal. Unter der Eigenwertbedingung

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \rho(M(x)) < 1$$

gilt dann

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-2} (\Lambda_*^{-1} x, V(x)) < 0.$$

Beweis:

Jeweils für alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß gilt:

- a) Wähle $B = I$!

$$2(x, V(x)) = 2(x, [M^T(x) - I] \Lambda(x) x) =$$

$$\left\langle x, \left\{ \Lambda(x) [M(x) - I] + [M^T(x) - I] \Lambda(x) \right\} x \right\rangle$$

Aufgrund der Normalität gilt nach Vorbemerkung 9.15:

$$2\rho(\Lambda(x) [M(x) - I]) = \rho(\Lambda(x) [M(x) - I] + [M^T(x) - I] \Lambda(x))$$

Da die zweite Matrix symmetrisch ist, folgt der erste Teil des Satzes.

- b) Wähle $B = \Lambda_*^{-1}$!

$$2(\Lambda_*^{-1} x, V(x)) = 2(\Lambda_*^{-1} x, [M^T(x) - I] \Lambda_* x) =$$

$$\left\langle x, \left\{ \Lambda_* [M(x) - I] \Lambda_*^{-1} + \Lambda_*^{-1} [M^T(x) - I] \Lambda_* \right\} x \right\rangle =$$

$$\left\langle x, [\Lambda_* M(x) \Lambda_*^{-1} + \Lambda_*^{-1} M^T(x) \Lambda_*] x \right\rangle = 2(x, x)$$

Analog zu oben folgt jetzt Teil b) des Satzes. $\square$

Ähnlich einfache Bedingungen für die Existenz einer Matrix B , sodaß $\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^{-2} (Bx, V(x)) > 0$ gilt, scheinen nicht zu existieren, da eine solche Matrix nicht mehr positiv definit sein darf, der Eigenvektor zum größten Eigenwert strikt positiv sein muß, und die anderen Eigenwerte noch bestimmte Ungleichungen erfüllen müssen, damit die quadratische Form (x, Bx) der Bedingung (F^*a) genügt (siehe auch 1.4.1.b1).

9.6. Schlußbemerkung

Kombiniert man jetzt die Ergebnisse der Abschnitte 9.3, 9.4 und 9.5 mit denen der Kapitel 4 bis 8, so erhält man doch noch relativ einfache Kriterien für Transienz, Rekurrenz, Ergodizität und die Existenz von Momenten der stationären Maße. Die bekannte Klassifikation der nicht populationsabhängigen Prozesse ist durch die Korollare 9.10 bzw 9.14 erfaßt. Diese beiden Korollare, kombiniert mit den Bedingungen (4.1b) bzw. (4.1b'), (5.1), (6.1) bzw. (6.3S) und (7.1) stellen die einfachsten Kriterien dar, vergleichbar mit den in Satz I.9.1 zusammengestellten für den eindimensionalen Fall.

Ähnliche Überlegungen wie in Abschnitt I.9.2 anzustellen ist nicht sinnvoll, da einerseits schon die Abschätzung der Normen teilweise sehr grob wird und andererseits auch Prozesse mit gleichmäßig beschränkten Momenten beliebiger Ordnung durch die entwickelten Kriterien nicht erfaßt werden können (siehe die Beispiele 9.1 und 9.2).

ANHANG 0Kriterien für Transienz, Rekurrenz und Ergodizität
bei Markoffschen Kettena) Diskrete Zeit.

$\{X_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ sei ein homogener Markoffscher Prozeß mit diskreter Zeit und abzählbarem Zustandsraum. Zur Vereinfachung der Notation werde angenommen, der Prozeß sei irreduzibel und der Zustandsraum sei $\mathbb{N}_0$. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten werde mit $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$ bezeichnet.

$$p_{ij}^{(n)} := P(X_{m+n}=j | X_m=i) \quad \text{für } i, j, m \in \mathbb{N}_0 \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 1 \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0 \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise sei

$$p_{ij} := p_{ij}^{(1)} \quad \text{für } i, j \in \mathbb{N}_0.$$

b) Kontinuierliche Zeit.

$\{Y(t): t \in \mathbb{R}_+\}$ sei ein homogener Markoffscher Prozeß mit kontinuierlicher Zeit und abzählbarem Zustandsraum. Zur Vereinfachung der Notation werde angenommen, der Prozeß sei irreduzibel und der Zustandsraum sei $\mathbb{N}_0$. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten werde mit $R(t) = (r_{ij}(t))$ bezeichnet.

$$r_{ij}(t) := P(Y(t+s)=j | Y(s)=i) \quad \text{für } i, j \in \mathbb{N}_0 \text{ und } s, t \in \mathbb{R}_+$$

$Q = (q_{ij})$ sei die zugehörige Q-Matrix, wobei

$$q_{ij} \geq 0 \quad \text{für } i, j \in \mathbb{N}_0, i \neq j,$$

$$0 < q_i := -q_{ii} < \infty \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_{ij} = 0 \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0.$$

$\{X_n^*: n \in \mathbb{N}_0\}$ sei der zu $\{Y(t)\}$ gehörige Sprungprozeß; dessen Ein-Schritt-Übergangsmatrix werde mit $P^* = (p_{ij}^*)$ bezeichnet.

$$p_{ij}^* := P(X_{n+1}^*=j | X_n^*=i) = (1-\delta_{ij})q_{ij}/q_i \quad \text{für } i, j, n \in \mathbb{N}_0$$

$\{T_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ sei der Prozeß der Sprungzeiten von $\{Y(t)\}$, dabei gilt

$$T_0 = 0,$$

$$P\{T_{n+1} - T_n > t \mid X_0^*, T_0, \dots, X_n^*, T_n\} = \exp[a_{X_n^*}^* t]$$

$$\text{für } t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}_0.$$

Der Markoffsche Prozeß $\{Y(t)\}$ ist nur dann durch die Q-Matrix eindeutig bestimmt (d.h. regulär) mit

$$\sum_{j=0}^{\infty} r_{ij}(t) = 1 \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0 \text{ und } t \in \mathbb{R}_+.$$

wenn in endlicher Zeit auch nur fast sicher endlich viele Sprünge auftreten können. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür liefert der folgende Satz (siehe z.B. Chung, 1967, Theorem II.19.1).

Satz 1. (Regularität)

Für $\{Y(t)\}$ gilt

$$P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty\right] = 1$$

genau dann wenn

$$P\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{X_n^*}^{-1} = \infty\right] = 1.$$

Vorbemerkung 2.

Bei der Untersuchung von $\{Y(t)\}$ auf Transienz oder Rekurrenz wurde es genügen, die gleiche Untersuchung beim Sprungprozeß $\{X_n^*\}$ durchzuführen, da die Kombinationen $\{X_n^*\}$ rekurrent und $\{Y(t)\}$ transient bzw. $\{X_n^*\}$ transient und $\{Y(t)\}$ rekurrent nicht auftreten können, wie man sich leicht überlegen kann. Die weiter unten angegebenen Kriterien für Transienz und Rekurrenz bei Ketten mit kontinuierlicher Zeit sind deshalb auch praktisch identisch mit den Kriterien für Ketten mit diskreter Zeit.

Bei der weiteren Klassifizierung der rekurrenten Ketten in ergodisch, geometrisch ergodisch oder stark ergodisch zeigt sich aber, daß für $\{X_n^*\}$ und $\{Y(t)\}$ fast alle Kombinationen auftreten können (siehe z.B. Tweedie, 1981), sodaß man sich hier nicht mehr auf die Untersuchung des Sprungprozesses zurückziehen kann.

Generalvoraussetzung 3.

Für die verschiedenen Kriterien werden nur die P- bzw. Q-Matrix und eine Testfunktion

$$\phi : N_0 \rightarrow R_+$$

verwendet, die für alle Kriterien die folgenden Bedingungen mit $\delta \geq 0$ und $\varepsilon \geq 0$ erfüllen muß.

Für $\{X_n\}$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \phi(j) < \infty \quad \text{für } i \in N_0 \quad (1a)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} [\phi(j) - \phi(i)] \leq -\delta \phi(i) - \varepsilon \quad (2a)$$

für $i \geq N$, $N \geq 0$ vorgegeben.

Für $\{Y(t)\}$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij} \phi(j) < \infty \quad \text{für } i \in N_0 \quad (1b)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij} \phi(j) \leq -\delta \phi(i) - \varepsilon \quad (2b)$$

für $i \geq N$, $N \geq 0$ vorgegeben.

Satz 4. (Transienz)

$\{X_n\} [\{Y(t)\}]$ ist genau dann transient, wenn es eine Funktion ϕ und eine Konstante $N > 0$ gibt, sodaß die Bedingungen (1a) und (2a) [(1b) und (2b)] für $\delta = \varepsilon = 0$ erfüllt sind und es ein $k \geq N$ gibt, sodaß

$$\phi(k) < \min\{\phi(j) : 0 \leq j \leq N-1\}. \quad (3)$$

Satz 5. (Rekurrenz)

$\{X_n\} [\{Y(t)\}]$ ist genau dann rekurrent, wenn es eine Funktion ϕ mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \phi(j) = \infty \quad (4)$$

und eine Konstante $N > 0$ gibt, sodaß die Bedingungen (1a) und (2a) [(1b) und (2b)] für $\delta = \varepsilon = 0$ erfüllt sind.

Satz 6. (Ergodizität)

$\{X_n\}$ $\{Y(t)\}$ ist genau dann ergodisch, wenn dieser Prozeß rekurrent ist, und es eine Funktion ϕ und eine Konstante $N>0$ gibt, sodaß die Bedingungen (1a) und (2a) [(1b) und (2b)] für $\delta=0$ und ein $\varepsilon>0$ erfüllt sind.

Satz 7. (geometrische Ergodizität)

$\{X_n\}$ $\{Y(t)\}$ ist genau dann geometrisch ergodisch, wenn dieser Prozeß rekurrent ist, und es eine Funktion ϕ und eine Konstante $N>0$ gibt, sodaß die Bedingungen (1a) und (2a) [(1b) und (2b)] für ein $\delta>0$ [$0<\delta<\inf\{q_i; i\in N_0\}$] und ein $\varepsilon>0$ erfüllt sind.

Satz 8. (starke Ergodizität)

$\{X_n\}$ $\{Y(t)\}$ ist genau dann stark ergodisch, wenn dieser Prozeß rekurrent ist, und es eine beschränkte Funktion ϕ und eine Konstante $N>0$ gibt, sodaß die Bedingungen (1a) und (2a) [(1b) und (2b)] für $\delta=0$ und ein $\varepsilon>0$ erfüllt sind.

Anmerkung 9.

Die Aussagen von Satz 4 und Satz 5 für den diskreten Fall entsprechen Theorem 2 und Theorem 1 von Mertens et al. (1978). Wendet man diese Kriterien dann auf den Sprungprozeß $\{X_n\}$ an und multipliziert die Ungleichungen mit q_i , so erhält man die entsprechenden Aussagen für $\{Y(t)\}$.

Bei den Sätzen 6, 7 und 8 ist diese Umnormierung nicht mehr möglich und, wie schon oben erwähnt, zeigen $\{X_n^*\}$ und $\{Y(t)\}$ nicht notwendig mehr analoges Verhalten, wobei die Raten q_i die wesentliche Rolle spielen.

Die weiteren Ergebnisse für den kontinuierlichen Fall scheinen neuer zu sein, sie entsprechen Theorem 3 (i), (ii) und (iii) kombiniert mit Theorem 4 aus Tweedie (1981). Die Ergebnisse für den diskreten Fall sind teilweise wesentlich älter und gehen auf verschiedene Autoren zurück. Für Satz 6 siehe Foster (1953), für Satz 7 siehe Popov (1977) und für Satz 8 siehe Isaacson und Tweedie (1978).

Sind jetzt $\{X_n\}$ und $\{Y(t)\}$ bzw. $\{X_n^*\}$ rekurrent, so kann man mit ähnlichen Kriterien die Existenz von Momenten der zugehörigen stationären Maße beweisen.

Das stationäre Maß von $\{X_n\}$ werde mit π , das von $\{X_n^*\}$ mit π^* und das von $\{Y(t)\}$ mit μ bezeichnet (zur Vereinfachung der Schreibweise sei z.B. $\pi_i = \pi(\{i\})$). Diese Maße erhält man als die nicht-negativen, nicht identisch verschwindenden und bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstanten eindeutigen Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij} \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_0$$

$$\pi_j^* = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^* p_{ij}^* \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_0$$

$$\mu_j = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i r_{ij}(t) \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}_+$$

$$\mu_j a_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{\infty} \mu_i a_{ij} \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_0$$

(siehe z.B. Chung, 1967, Theorem I.9.7 und Theorem I.9.8)

Satz 10. (Momente der stationären Maße)

a) $\{X_n\}$ sei rekurrent; für eine Funktion $\Psi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \Psi(j) < \infty,$$

wenn eine Funktion $\Phi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ und eine Konstante $N > 0$ existieren, sodaß

$$\Psi(i) \leq \Phi(i) \quad \text{für } i \geq N \quad (5a)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \Phi(j) < \infty \quad \text{für } 0 \leq i \leq N-1 \quad (6a)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} [\Phi(j) - \Phi(i)] \leq -\Psi(i) \quad \text{für } i \geq N. \quad (7a)$$

b) $\{Y(t)\}$ sei rekurrent; für eine Funktion $\Psi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \Psi(j) < \infty .$$

wenn eine Funktion $\Phi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ und eine Konstante $N > 0$ existieren, sodaß

$$q_i^{-1} \Psi(i) \leq \Phi(i) \quad \text{für } i \geq N \quad (5b)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} q_{i,j} \Phi(j) < \infty \quad \text{für } 0 \leq i \leq N-1 \quad (6b)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} q_{i,j} \Phi(j) \leq -\Psi(i) \quad \text{für } i \geq N. \quad (7b)$$

Beweis:

Teil a) dieses Satzes ist ein Spezialfall von Theorem 1 in Tweedie (1983) für abzählbaren Zustandsraum und endliche Ausnahmemenge.

Teil b) folgt durch Anwendung von Teil a) auf den Sprungprozeß $\{X_n^*\}$ und die Funktion $\Psi^*(i) = q_i^{-1} \Psi(i)$.

(5b) ist identisch mit

$$\Psi^*(i) \leq \Phi(i) \quad \text{für } i \geq N.$$

(6b) ist äquivalent zu

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}^* \Phi(j) - \Phi(i) < \infty \quad \text{für } 0 \leq i \leq N-1.$$

(7b) ist äquivalent zu

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}^* [\Phi(j) - \Phi(i)] \leq -\Psi^*(i) \quad \text{für } i \geq N.$$

Damit gilt unter den Voraussetzungen von Teil b) nach Teil a)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^* \Psi^*(j) < \infty .$$

Da π^* und μ bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstanten eindeutig sind, kann

$$\pi_j^* = \mu_j q_i \quad \text{für } j \geq 0$$

angenommen werden. Damit erhält man

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j q_j q_j^{-1} \Psi(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^* \Psi^*(j) < \infty . \quad \square$$

ANHANG 1Lemma für Teil ILemma 1.

Unter den Voraussetzungen (φ^*) und $C_k^\varphi < \infty$ gilt:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k)(i-1) \leq \frac{N}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi$$

Beweis:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k)(i-1) = \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) \varphi(i) \frac{i-1}{\varphi(i)} \leq$$

$$\sup_{x \geq N+1} \frac{x-1}{\varphi(x)} \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) \varphi(i) \leq \frac{N}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi \quad \square$$

Lemma 2.

Unter den Voraussetzungen (φ^*) für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = \infty$ gilt:

$$\sum_{i=0}^N p_i(k)(i-1)^2 \leq 1 + \frac{N^2}{\varphi(N)} C_k^\varphi$$

Beweis:

$$\sum_{i=0}^N p_i(k)(i-1)^2 = p_0(k) + \sum_{i=1}^N p_i(k)(i-1)^2 \leq$$

$$1 + \sum_{i=0}^N p_i(k) \varphi(i) \frac{i^2}{\varphi(i)} \leq 1 + \sup_{x \leq N} \frac{x^2}{\varphi(x)} \sum_{i=0}^N p_i(k) \varphi(i) \leq$$

$$1 + \frac{N^2}{\varphi(N)} C_k^\varphi \quad \square$$

Lemma 3.

Unter der Voraussetzung $C_k^{(2)} < \infty$ gilt:

$$\sum_{i=0}^N p_i(k)(i-1)^2 \leq C_k^{(2)} - 2m_k + 1 = \sigma_k^2 + (m_k-1)^2$$

Beweis:

$$\sum_{i=0}^N p_i(k)(i-1)^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k)[i^2 - 2i + 1] =$$

$$C_k^{(2)} - 2m_k + 1 = \sigma_k^2 + (m_k-1)^2 \quad \square$$

Lemma 4.

Unter den Voraussetzungen (φ^*) für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$ und $C_k^\varphi < \infty$ gilt:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k)(i-1)^2 \leq \frac{N^2}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi$$

Beweis:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k)(i-1)^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) \varphi(i) \frac{(i-1)^2}{\varphi(i)} \leq$$

$$\sup_{x \geq N+1} \frac{(x-1)^2}{\varphi(x)} \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) \varphi(i) \leq \frac{N^2}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi \quad \square$$

Lemma 5.

Unter den Voraussetzungen (φ^*) für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$ und $C_k^\varphi < \infty$ gilt:

$$\sum_{i=0}^N p_i(k)(i-1)^2 \geq \sigma_k^2 + (m_k-1)^2 - \frac{N^2}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi$$

Beweis:

$$\sum_{i=0}^N p_i(k)(i-1)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(k)(i-1)^2 - \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k)(i-1)^2$$

Siehe jetzt Lemma 3 und Lemma 4. $\square$

Lemma 6.

Unter den Voraussetzungen (φ^*) für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$ und $C_k^\varphi < \infty$ gilt:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i) - \log(k+1)] \leq \frac{2}{k+1} \frac{N+1}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi$$

Beweis:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i) - \log(k+1)] \leq$$

$$[\log(k+N+1) - \log(k+1)] \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) +$$

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) [\log(k+i) - \log(k+N+1)]$$

Die erste Summe läßt sich abschätzen durch

$$\log(1 + \frac{N}{k+1}) \varphi^{-1}(N+1) C_k^\varphi \leq \frac{1}{k+1} \frac{N}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi$$

Die zweite Summe läßt sich umformen zu

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{j+N+2}(k) \sum_{i=0}^j [\log(k+N+2+i) - \log(k+N+1+i)] =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} [\log(k+N+2+i) - \log(k+N+1+i)] \sum_{j=i}^{\infty} p_{j+N+2}(k) =$$

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} [\log(k+i+1) - \log(k+i)] \sum_{j=i+1}^{\infty} p_j(k) \leq$$

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{k+i}) \varphi^{-1}(i+1) C_k^\varphi \leq C_k^\varphi \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{(k+i) \varphi(i+1)} \leq$$

$$\frac{1}{k+1} C_k^\varphi \sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi^{-1}(i+1) \leq \frac{1}{k+1} C_k^\varphi \int_{N+1}^{\infty} \frac{dt}{\varphi(t)} \leq$$

$$\frac{1}{k+1} C_k^\varphi \frac{(N+1)^2}{\varphi(N+1)} \int_{N+1}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{k+1} \frac{N+1}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi$$

Die Addition der beiden Abschätzungen liefert dann

$$\frac{1}{k+1} \frac{N}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi + \frac{1}{k+1} \frac{N+1}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi \leq \frac{2}{k+1} \frac{N+1}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi \quad \square$$

Lemma 7.

Unter den Voraussetzungen $0 < \alpha < 1$, (φ^*) für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2/\varphi(t) = 0$, $C_k^\varphi < \infty$ und $N < k$ gilt:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{\alpha-k\alpha}] \leq \alpha k^{\alpha-1} \left[1 + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{k}{k+N} \right]^{1-\alpha} \right] \frac{N+1}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi$$

Beweis:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{\alpha-k\alpha}] \leq [(k+N)^{\alpha-k\alpha}] \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) + \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{\alpha-(k+N)\alpha}]$$

Die erste Summe läßt sich abschätzen durch

$$k^\alpha \left[\left(1 + \frac{N}{k}\right)^{\alpha-1} \right] \varphi^{-1}(N+1) C_k^\varphi \leq \alpha k^{\alpha-1} \frac{N}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi$$

Die zweite Summe läßt sich umformen zu (siehe den Beweis von Lemma 6)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=N+1}^{\infty} [(k+i)^{\alpha-(k+i-1)\alpha}] \sum_{j=i+1}^{\infty} p_j(k) \leq \\ & \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{(k+i-1)^{\alpha-1}}{\varphi(i+1)} C_k^\varphi \leq (k+N)^{\alpha-1} C_k^\varphi \sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi^{-1}(i+1) \leq \\ & (k+N)^{\alpha-1} C_k^\varphi \int_{N+1}^{\infty} \frac{dt}{\varphi(t)} \leq (k+N)^{\alpha-1} \frac{N+1}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi \end{aligned}$$

Die Addition der beiden Abschätzungen liefert dann

$$\begin{aligned} & \alpha k^{\alpha-1} \frac{N}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi + (k+N)^{\alpha-1} \frac{N+1}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi \leq \\ & \alpha k^{\alpha-1} \left[1 + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{k}{k+N} \right]^{1-\alpha} \right] \frac{N+1}{\varphi(N+1)} C_k^\varphi \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 8.

Unter den Voraussetzungen $\alpha > 0$, (φ^*) für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1+\alpha}/\varphi(t) \leq 1$ und $C_k^\varphi < \infty$ gilt:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{1+\alpha} - k^{1+\alpha}] \leq 2^{1+\alpha} \frac{k^{1+\alpha}}{\varphi(k+1)} C_k^\varphi$$

Beweis:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} p_i(k) [(k+i-1)^{1+\alpha} - k^{1+\alpha}] \leq$$

$$\sup_{x \geq k+1} \left[\frac{k+x-1}{x-1} \right]^{1+\alpha} \sum_{i=k+1}^{\infty} p_i(k) (i-1)^{1+\alpha} \leq 2^{1+\alpha} \frac{k^{1+\alpha}}{\varphi(k+1)} C_k^\varphi \quad \square$$

ANHANG 2

Lemmata für Teil II

$$U_{ix} = \{y \in S : \|y - e^i\| \leq \delta_U \|x\|\}$$

$$\theta^i = x + \vartheta_i (y - e^i) \quad , \quad 0 < \vartheta_i = \vartheta_i(x, y) < 1$$

(siehe Abschnitt II.3.2)

Lemma 1.

Unter den Voraussetzungen $\alpha > 0$, (φ^*) für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha / \varphi(t) = 0$ und $C_{ix}^\varphi < \infty$ gilt:

$$\overline{\sum_{y \notin U_{ix}}} p_y^i(x) \|y - e^i\|^\alpha \leq \frac{\delta_U^\alpha \|x\|^\alpha}{\varphi(\delta_U \|x\|)} C_{ix}^\varphi$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{y \notin U_{ix}}} p_y^i(x) \|y - e^i\|^\alpha &= \overline{\sum_{y \notin U_{ix}}} p_y^i(x) \varphi(\|y - e^i\|) \frac{\|y - e^i\|^\alpha}{\varphi(\|y - e^i\|)} \leq \\ \sup_{y \notin U_{ix}} \frac{\|y - e^i\|^\alpha}{\varphi(\|y - e^i\|)} \overline{\sum_{y \notin U_{ix}}} p_y^i(x) \varphi(\|y - e^i\|) &\leq \frac{\delta_U^\alpha \|x\|^\alpha}{\varphi(\delta_U \|x\|)} C_{ix}^\varphi \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 2.

Unter den Voraussetzungen $\alpha > 1$, (φ^*) für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha / \varphi(t) = \infty$ und $C_{ix}^\varphi < \infty$ gilt:

$$\overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \|y - e^i\|^\alpha \leq \frac{\delta_U^\alpha \|x\|^\alpha}{\varphi(\delta_U \|x\|)} C_{ix}^\varphi$$

Beweis:

$$U'_{ix} := U_{ix} - \{e^i\}$$

$$\overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \|y - e^i\|^\alpha = \overline{\sum_{y \in U'_{ix}}} p_y^i(x) \varphi(\|y - e^i\|) \frac{\|y - e^i\|^\alpha}{\varphi(\|y - e^i\|)} \leq$$

$$\sup_{y \in U'_{ix}} \frac{\|y - e^i\|^\alpha}{\varphi(\|y - e^i\|)} \overline{\sum_{y \in U'_{ix}}} p_y^i(x) \varphi(\|y - e^i\|) \leq \frac{\delta_U^\alpha \|x\|^\alpha}{\varphi(\delta_U \|x\|)} C_{ix}^\varphi \quad \square$$

Lemma 3.

Unter den Voraussetzungen $\alpha > 1$, (φ^*) für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha / \varphi(t) \leq 1$ und $C_{ix}^\varphi < \infty$ gilt:

$$\overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \|y - e^i\|^\alpha \leq C_{ix}^{(\alpha)}$$

Lemma 4.

Für $\theta^i = \theta^i(x, y)$ bei festem $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß gilt:

$$\sup_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\|^\alpha \leq \begin{cases} (\|x\| - 1)^\alpha & \text{falls } \alpha < 0 \\ 1 & \text{falls } \alpha = 0 \\ (1 + \delta_U)^\alpha \|x\|^\alpha & \text{falls } \alpha > 0 \end{cases}$$

Beweis:

a) $\alpha < 0$

$$\sup_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\|^\alpha = \left[\inf_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\| \right]^\alpha$$

$$\inf_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\| \geq \inf_{\substack{0 \leq \vartheta \leq 1 \\ y \in U_{ix}}} \|x + \vartheta(y - e^i)\| \geq \|x\| - 1$$

b) $\alpha = 0$

$$\|\theta^i\|^0 = 1$$

c) $\alpha > 0$

$$\sup_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\|^\alpha = \left[\sup_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\| \right]^\alpha$$

$$\sup_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\| \leq \sup_{\substack{0 \leq \vartheta \leq 1 \\ y \in U_{ix}}} \|x + \vartheta(y - e^i)\| \leq (1 + \delta_U) \|x\| \quad \square$$

Lemma 5.

Falls $\|x\|$ hinreichend groß, gilt für $\Psi_1(t) = \frac{1}{\log t}$:

$$\sup_{y \in U_{ix}} |\Psi_1''(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{2n-2} \leq \left. \frac{n \log t + \log x_0 + 2}{n^3 t^2 \log^3 t} \right|_{t=\|x\|-1}$$

Beweis:

$$\Psi_1''(t) = \frac{2 + \log t}{t^2 \log^3 t}$$

$$|\Psi_1''(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{2n-2} = \frac{[2 + \log F(\theta^i)] \|\theta^i\|^{2n-2}}{F^2(\theta^i) \log^3 F(\theta^i)} \leq$$

$$\frac{[2 + \log(x_0 \|\theta^i\|^n)] \|\theta^i\|^{2n-2}}{\|\theta^i\|^{2n} \log^3 \|\theta^i\|^n} = \frac{n \log t + \log x_0 + 2}{n^3 t^2 \log^3 t} \Big|_{t=\|\theta^i\|}$$

$$\sup_{y \in U_{ix}} |\Psi_1''(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{2n-2} \leq$$

$$\sup_{y \in U_{ix}} \left. \frac{n \log t + \log x_0 + 2}{n^3 t^2 \log^3 t} \right|_{t=\|\theta^i\|} =$$

$$\left. \frac{n \log t + \log x_0 + 2}{n^3 t^2 \log^3 t} \right|_{t = \inf_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\|}$$

(siehe auch den Beweis von Lemma 4) $\square$

Lemma 6.

Falls $\|x\|$ hinreichend groß, gilt für $\Psi_1(t) = \frac{1}{\log t}$:

$$\sup_{y \in U_{ix}} |\Psi_1'(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{n-2} \leq \left. \frac{1}{n^2 t^2 \log^2 t} \right|_{t=\|x\|-1}$$

Beweis:

$$|\Psi_1'(t)| = \frac{1}{t \log^2 t}$$

$$|\Psi_1'(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{n-2} = \frac{\|\theta^i\|^{n-2}}{F(\theta^i) \log^2 F(\theta^i)} \leq$$

$$\frac{\|\theta^i\|^{n-2}}{\|\theta^i\|^n \log^2 \|\theta^i\|^n} = \frac{1}{n^2 t^2 \log^2 t} \Big|_{t=\|\theta^i\|}$$

$$\sup_{y \in U_{ix}} |\Psi_1'(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{n-2} \leq \sup_{y \in U_{ix}} \frac{1}{n^2 t^2 \log^2 t} \Big|_{t=\|\theta^i\|} \leq$$

$$\frac{1}{n^2 t^2 \log^2 t} \Big|_{t = \inf_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\|}$$

(siehe auch den Beweis von Lemma 4) $\square$

Lemma 7.

Unter der Voraussetzung (F*a) gilt für $\Psi_1(t) = \frac{1}{\log t}$ und für alle $x \in S$ mit $\|x\|$ hinreichend groß:

$$\overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) [\Psi_1(F(x+y-e^i)) - \Psi_1(F(x))] \leq 0$$

Beweis:

$$H_r := \{z \in G_{\delta}(F) : F(z) \geq r\} \quad , \quad r > 0$$

Aufgrund von Bedingung (F*a) gilt:

a) H_r ist konvex.

b) Für festes $z \in G_{\delta}(F)$ ist $F(tz)$ stetig und streng monoton steigend (als Funktion von $t \in \mathbb{R}^+$).

$$F(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(tz) = \infty.$$

c) $z - e^i \in G_{\delta}(F)$ für $z \in G_+$ und $\|z\|$ hinreichend groß.

Für die Aussage des Lemmas genügt zu zeigen:

$$\Psi_1(F(x+y-e^i)) - \Psi_1(F(x)) = \frac{1}{\log F(x+y-e^i)} - \frac{1}{\log F(x)} \leq 0$$

oder äquivalent dazu

$$F(x+y-e^i) \geq F(x)$$

$$\text{für alle } y \in G_+ \text{ mit } \|y - e^i\| \geq \delta_U \|x\|.$$

Für $\|x\|$ hinreichend groß wiederum folgt dies aus

$$\{x\} + G_{\delta}(F) \subset H_{F(x)}.$$

Betrachte jetzt $z \in \{x\} + G_{\delta(F)}$: z läßt sich darstellen in der Form $z = x + y$ mit $x \in G_+ - \{0\}$ und $y \in G_{\delta(F)}$. Für beliebiges $t > 1$ gilt dann:

$$tz = x + (t-1)x + ty = x + y'$$

mit $y' \in G_{\delta(F)}$ da $(t-1)x$ und $ty \in G_{\delta(F)}$, d.h.

$$tz \in \{x\} + G_{\delta(F)}.$$

Es genügt also, sich auf $z \in \text{Rd}[\{x\} + G_{\delta(F)}] - \{x\}$ zu beschränken. Solch ein z läßt sich eindeutig darstellen in der Form $z = x + y$ mit $y \in \text{Rd}[G_{\delta(F)}] - \{0\}$, wobei x und y linear unabhängig sind.

Aufgrund von Monotonie und Stetigkeit gilt:

Für y existiert genau ein $t^* > 0$ mit $F(t^*y) = F(x)$.

Für z existiert genau ein $t > 0$ mit $F(tz) = F(x)$.

$F(z) \geq F(x)$ ist äquivalent zu $t \leq 1$.

$\{x, y, z\}$ sind linear abhängig aber paarweise linear unabhängig. Somit existiert unter Berücksichtigung der speziellen Form von z ein $t' > 0$ und ein $\varepsilon \in (0, 1)$ mit

$$t'z = \varepsilon x + (1-\varepsilon)t^*y.$$

($t'z$ ist der Schnittpunkt des von z erzeugten Strahles mit der Verbindungsstrecke zwischen x und t^*y .)

Wegen $\varepsilon < 1$ und $(1-\varepsilon)t^*y \in \text{Rd}[G_{\delta(F)}]$ folgt $t'z \in \text{Rd}[\{\varepsilon x\} + G_{\delta(F)}]$ und $t'z \notin \{x\} + G_{\delta(F)}$, und somit

$$t' < 1.$$

Da $H_{F(x)}$ konvex ist, folgt aus x und $t^*y \in H_{F(x)}$ dann auch

$$t'z = \varepsilon x + (1-\varepsilon)t^*y \in H_{F(x)}.$$

also

$$F(t'z) \geq F(x) = F(tz)$$

oder äquivalent dazu

$$t \leq t' < 1. \quad \square$$

Lemma 8.

Falls $\|x\|$ hinreichend groß, gilt für $\Psi_2(t) = \log t$:

$$\sup_{y \in U_{ix}} |\Psi'_2(F(\theta^i))| \|\theta^i\|^{n-2} \leq \frac{1}{(\|x\|-1)^2}$$

Beweis:

$$\Psi'_2(t) = \frac{1}{t}$$

$$\Psi'_2(F(\theta^i)) \|\theta^i\|^{n-2} = \frac{\|\theta^i\|^{n-2}}{F(\theta^i)} \leq \|\theta^i\|^{-2}$$

$$\sup_{y \in U_{ix}} \Psi'_2(F(\theta^i)) \|\theta^i\|^{n-2} \leq \sup_{y \in U_{ix}} \|\theta^i\|^{-2} \leq \frac{1}{(\|x\|-1)^2}$$

(siehe Lemma 4) $\square$

Lemma 9.

Falls $\|x\|$ hinreichend groß, gilt unter der Voraussetzung (φ^*) für $\Psi_2(t) = \log t$:

$$\overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) [\Psi_2(F(x+y-e^i)) - \Psi_2(F(x))] \leq$$

$$\frac{n \log(1+\delta_u) + \log \delta_0}{\varphi(\delta_u \|x\|)} C_{ix}^\varphi$$

Beweis:

$$\overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) [\log F(x+y-e^i) - \log F(x)] =$$

$$\overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \log \frac{F(x+y-e^i)}{F(x)} \leq$$

$$\overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \log \left[\delta_0 \frac{\|x+y-e^i\|^n}{\|x\|^n} \right] =$$

$$\overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \varphi(\|y-e^i\|) \frac{1}{\varphi(\|y-e^i\|)} \log \left[\delta_0 \frac{\|x+y-e^i\|^n}{\|x\|^n} \right] \leq$$

$$\sup_{y \in U_{ix}} \left[\frac{1}{\varphi(\|y-e^i\|)} \log \left[\delta_0 \frac{\|x+y-e^i\|^n}{\|x\|^n} \right] \right] \overline{\sum_{y \in U_{ix}}} p_y^i(x) \varphi(\|y-e^i\|) \leq$$

$$C_{ix}^{\varphi} \sup_{y \in U_{ix}} \left| \frac{\log [\delta_0 (1+t)^n]}{\varphi(t \|x\|)} \right|_{t=\|y-e^i\|/\|x\|} =$$

$$C_{ix}^{\varphi} \left| \frac{\log [\delta_0 (1+t)^n]}{\varphi(t \|x\|)} \right|_{t=\inf_{y \in U_{ix}} \|y-e^i\|/\|x\|} =$$

$$\frac{\log [\delta_0 (1+\delta_u)^n]}{\varphi(\delta_u \|x\|)} C_{ix}^{\varphi} \quad \square$$

Lemma 10.

Unter den Voraussetzungen (F*), (φ^*) für ein φ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n / \varphi(t) = 0$, $C_{ix}^{\varphi} < \infty$ und $\|x\|$ hinreichend groß gilt für die Testfunktion $\Phi_3 = F(x)$:

$$\sup_{y \in U_{ix}} p_y^i(x) [\Phi_3(x+y-e^i) - \Phi_3(x)] \leq \delta_0 (1+\delta_u)^n \frac{\delta_u^n \|x\|^n}{\varphi(\delta_u \|x\|)} C_{ix}^{\varphi}$$

Beweis:

$$\sup_{y \in U_{ix}} p_y^i(x) [F(x+y-e^i) - F(x)] \leq \sup_{y \in U_{ix}} p_y^i(x) \delta_0 \|x+y-e^i\|^n \leq$$

$$\delta_0 \sup_{y \in U_{ix}} p_y^i(x) (\|x\| + \|y-e^i\|)^n =$$

$$\delta_0 \sup_{y \in U_{ix}} p_y^i(x) \|y-e^i\|^n \frac{(\|x\| + \|y-e^i\|)^n}{\|y-e^i\|^n} \leq$$

$$\delta_0 \sup_{y \in U_{ix}} \frac{(\|x\| + \|y-e^i\|)^n}{\|y-e^i\|^n} \sup_{y \in U_{ix}} p_y^i(x) \|y-e^i\|^n \leq$$

$$\delta_0 (1+\delta_u)^n \frac{\delta_u^n \|x\|^n}{\varphi(\delta_u \|x\|)} C_{ix}^{\varphi} \quad \square$$

ZUSAMMENFASSUNG

RITTGEN, WERNER:

ÜBER DAS QUALITATIVE VERHALTEN POPULATIONSABHÄNGIGER MARKOFFSCHER VERZWEIGUNGSPROZESSE

Ein populationsabhängiger Markoffscher Verzweigungsprozeß ist eine Verallgemeinerung eines "klassischen" Verzweigungsprozesses, indem man zuläßt, daß Nachkommensverteilungen und Sterberaten der einzelnen Individuen vom aktuellen Prozeßzustand abhängen. Der Zustand 0 wird reflektierend gewählt.

Unter Zuhilfenahme von Kriterien aus der Theorie der Markoffschen Ketten mit diskreter und kontinuierlicher Zeit konnten Bedingungen für Regularität, Transienz, Rekurrenz, Ergodizität und geometrische Ergodizität der betrachteten Prozesse und die Existenz von Momenten der stationären Maße gefunden werden

Im eindimensionalen (Ein-Typ-) Fall sind dies im wesentlichen Bedingungen an den Erwartungswert und teilweise noch an höhere Momente der Nachkommensverteilungen für hinreichen große Populationen. Eine Übertragung dieser Bedingungen auf den mehrdimensionalen (Mehr-Typ-) Prozeß anhand der bekannten Analogie zwischen dem Erwartungswert der Nachkommensverteilung und dem Perron-Frobenius-Eigenwert der Erwartungswertmatrix bei den "klassischen" Verzweigungsprozessen ist nicht möglich, wie durch zwei Beispiele gezeigt wurde. An Stelle des Erwartungswertes der Nachkommensverteilung beim eindimensionalen Prozeß tritt bei den mehrdimensionalen populationsabhängigen Prozessen die Projektion der mittleren Drift bzw. Driftrate auf ein geeignetes wählendes Gradientenfeld. Die zuerst vermuteten Eigenwertbedingungen sind nur unter zusätzlichen Konvergenzvoraussetzungen an die Erwartungswertmatrizen zu erhalten.

L I T E R A T U R

- Athreya, K.B., Karlin, S. (1967): Limit theorems for the split times of branching processes. J. Math. Mech. 17, 257-277.
- Athreya, K.B., Ney, P. (1972): **Branching Processes**, Springer: Berlin.
- Beckenbach, E.F., Bellman, R. (1971): **Inequalities** (3rd printing), Springer: Berlin.
- Bellman, R. (1970): **Introduction to Matrix Analysis** (2nd edn.), McGraw-Hill: New York.
- Bellman, R., Harris, T.E. (1952): On age-dependent binary branching processes, Annals of Mathematics 55, 280-295.
- Berman, A., Plemmons, R.J. (1979): **Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences**, Academic Press: New York.
- Billingsley, P. (1979): **Probability and Measure**, Wiley: New York.
- Chung, K.L. (1967): **Markov Chains with Stationary Transition Probabilities** (2nd edn.), Springer: Berlin.
- Darzynkiewicz, Z., Andreeff, M. (1981): Multiparameter flow cytometry, part I: Application in analysis of the cell cycle, Clinical Bulletin 11 NO.2, 47-57.
- Darzynkiewicz, Z., Traganos, F., Melamed, M.R. (1980): New cell cycle compartments identified by multiparameter flow cytometry, Cytometry 1,2, 98-108.
- Doob, J.L. (1953): **Stochastic Processes**, Wiley: New York.
- Doorn, E.A. van (1985): Conditions for exponential ergodicity and bounds for the decay parameter of a birth-death process, Adv. Appl. Prob. 17, 514-530.
- Edgar, G.A., Sucheston, L. (1976): Amarts: A class of asymptotic martingales: A. Discrete parameter, Journal of Multivariate Analysis 6, 193-221.
- Feller, W. (1967&1970): **Introduction to Probability Theory and its Applications**, Vol. I (3rd edn.) & Vol. II (2nd edn.), Wiley: New York.
- Foster, F.G. (1953): On stochastic matrices associated with certain queueing processes, Ann. Math. Statist. 24, 335-360.
- Fujimagari, T. (1976): Controlled Galton-Watson process and its asymptotic behavior, Kôdai Math. Sem. Rep. 27, 11-18.
- Freedman, D. (1971): **Markov Chains**, Holden-Day: San Francisco.
- Götz, Th. (1985): Generationsabhängige Verzweigungsprozesse mit Einwanderung, Dissertation, Universität Heidelberg.
- Harris, T.E. (1952): First passage and recurrence distributions, Trans. Amer. Math. Soc. 73, 471-486.
- Harris, T.E. (1963): **The Theory of Branching Processes**, Springer: Berlin.
- Hall, P., Heyde, C.C. (1980): **Martingale Limit Theory and its Application**, Academic Press: New York.

- Höpfner, R. (1983): Über einige Klassen von zustandsabhängigen Galton-Watson-Prozessen, Dissertation, Universität Mainz.
- Höpfner, R. (1985a): On some classes of population-size-dependent Galton-Watson processes, J. Appl. Probability 22, 25-38.
- Höpfner, R. (1985b): A note on the probability of extinction in some class of population-size-dependent Galton-Watson processes, J. Appl. Probability 22, 920-925.
- Isaacson, D., Tweedie, R. L. (1978): Criteria for strong ergodicity of Markov chains, J. Appl. Probability 15, 87-95.
- Kendall, D. G. (1948): On the role of variable generation time in the development of a stochastic birth process, Biometrika 35, 316-330.
- Kesten, H. (1976): Recurrence criteria for multi-dimensional Markov chains and multi-dimensional linear birth and death processes, Adv. Appl. Prob. 8, 58-87.
- Kingman, J. F. C. (1961): The ergodic behaviour of random walks, Biometrika 48, 391-396.
- Klebaner, F. C. (1983): Population size dependent branching processes with linear rate of growth, J. Appl. Probability 20, 242-250.
- Klebaner, F. C. (1984a): On population-size-dependent branching processes, Adv. Appl. Prob. 16, 30-55.
- Klebaner, F. C. (1984b): Geometric rate of growth in population-size-dependent branching processes, J. Appl. Probability 21, 40-49.
- Klebaner, F. C. (1985): A limit theorem for population-size-dependent branching processes, J. Appl. Probability 22, 48-57.
- Knopp, K. (1964): Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer: Berlin.
- Küster, P. (1983): Generalized Markov branching processes with state-dependent offspring distributions, ZW. 475-503.
- Küster, P. (1984): Cooperative birth processes with linear or sub-linear intensity, Stochastic Processes Appl. 17, 313-325.
- Küster, P. (1985): Asymptotic growth of controlled Galton-Watson processes, Ann. Prob. 13, 1157-1178.
- Labkovskii, V. A. (1972): A limit theorem for generalized random branching processes depending on the size of the population, Theor. Probability Appl. 17, 72-85.
- Levy, J. B. (1979): Transience and recurrence of state dependent branching processes with an immigration component, Adv. Appl. Prob. 11, 73-92; correction id. S.889.
- Lipow, C. (1975): A branching model with population size dependence, Adv. Appl. Prob. 7, 495-510.
- Lipow, C. (1977): Limiting diffusion for population-size dependent branching processes, J. Appl. Probability 14, 14-24.
- Mertens, J.-F., Samuel-Cahn, E., Zamir, S. (1978): Necessary and sufficient conditions for recurrence and transience of Markov chains, in terms of inequalities, J. Appl. Probability 15, 848-851.

- Milch, P.R. (1968): A multi-dimensional linear growth birth and death process, Ann.Math.Statist. **39**, 727-754.
- Oldeweme, U. (1983): Mathematische Modelle für das Tumorwachstum, Diplomarbeit für den Studiengang Medizinische Informatik, Universität Heidelberg und Fachhochschule Heilbronn.
- Pakes, A.G. (1971): A branching process with a state dependent immigration component, Adv.Appl.Prob. **3**, 301-314.
- Popov, N.N. (1977): Conditions for geometric ergodicity of countable Markov chains, Soviet Math.Dokl. **18**, 676-679.
- Rittgen, W. (1978): Zellerneuerungssysteme, in Simulationismethoden in der Medizin und Biologie (Reihe Medizinische Informatik und Statistik **8**), 310-333, Springer: Berlin.
- Rittgen, W. (1980): Positive recurrence of multi-dimensional population-dependent branching processes, in Biological Growth and Spread (Lecture Notes in Biomathematics **38**), 98-108, Springer: Berlin.
- Rittgen, W. (1981): Cell renewal systems, in Proceedings of the 1981 United Kingdom Simulation Council Conference on Computer Simulation, 162-172, Westbury House: Guildford.
- Rittgen, W. (1983): Controlled branching processes and their application to normal and malignant haematopoiesis, Bull.Math.Biol. **45**, 617-626.
- Rittgen, W., Tautu, P. (1976): Branching models for the cell cycle, in Mathematical Models in Medicine (Lecture Notes in Biomathematics **11**), 109-126, Springer: Berlin.
- Sevst'yanov, B.A., Zubkov, A.M. (1974): Controlled branching processes, Theor.Probability Appl. **19**, 14-24.
- Stewart, D.B. (1976): A subcritical branching process with state dependent immigration, Math.Biosci. **31**, 175-190.
- Tweedie, R.L. (1975): The robustness of positive recurrence and recurrence of Markov chains under perturbations of the transition probabilities, J.Appl.Probability **12**, 744-752.
- Tweedie, R.L. (1981): Criteria for ergodicity, exponential ergodicity and strong ergodicity of Markov processes, J.Appl.Probability **18**, 122-130.
- Tweedie, R.L. (1983): The existence of moments for stationary Markov chains, J.Appl.Probability **20**, 191-196.
- Vasil'ev, N.B., Levina, L.M., Leontovich, A.M., Pyatetskii-Shapiro, I.I. (1968): Regulation of numbers in a population of dividing cells, Problems of Information Transmission **4**, 84-91.
- Wofsy, C. (1980): Behavior of limiting diffusions for density-dependent branching processes, in Biological Growth and Spread (Lecture Notes in Biomathematics **38**), 130-137, Springer: Berlin.
- Yanev, N.M. (1975): Conditions for degeneracy of φ -branching processes with random φ , Theor.Probability Appl. **20**, 421-428.
- Yule, G.U. (1924): A mathematical theory of evolution based on the conclusion of Dr. J.C. Willis, F.R.S., Philosophical Transactions of the Royal Society of London **213**, 21-87.
- Zubkov, A.M. (1974): Analogies between Galton-Watson processes and φ -branching processes, Theor.Probability Appl. **19**, 309-331.

LEBENS LAUF

Werner Rittgen, geboren am

18.8.1947	in Worms am Rhein
1954 - 1958	Besuch der Volksschule in Kindenheim
1958 - 1966	Besuch des Leininger Gymnasiums in Grünstadt
21.10.1966	Reifeprüfung
ab Sommer 1967	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Johannes-Gutenberg-Universität in Mainz
22.10.1974	Diplomprüfung in Mathematik. Thema der Diplomarbeit: "Die Generationsverteilung in subkritischen Verzweigungsprozessen mit Überlebenschance"
ab 1.1.1975	wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Abtei- lung Mathematische Modelle des Instituts für Dokumentation, Information und Statistik am Deutschen Krebsforschungszentrum Heidelberg
ab 1978	Mitglied des Sonderforschungsbereiches 123 "Stochastische Mathematische Modelle" an der Universität Heidelberg

